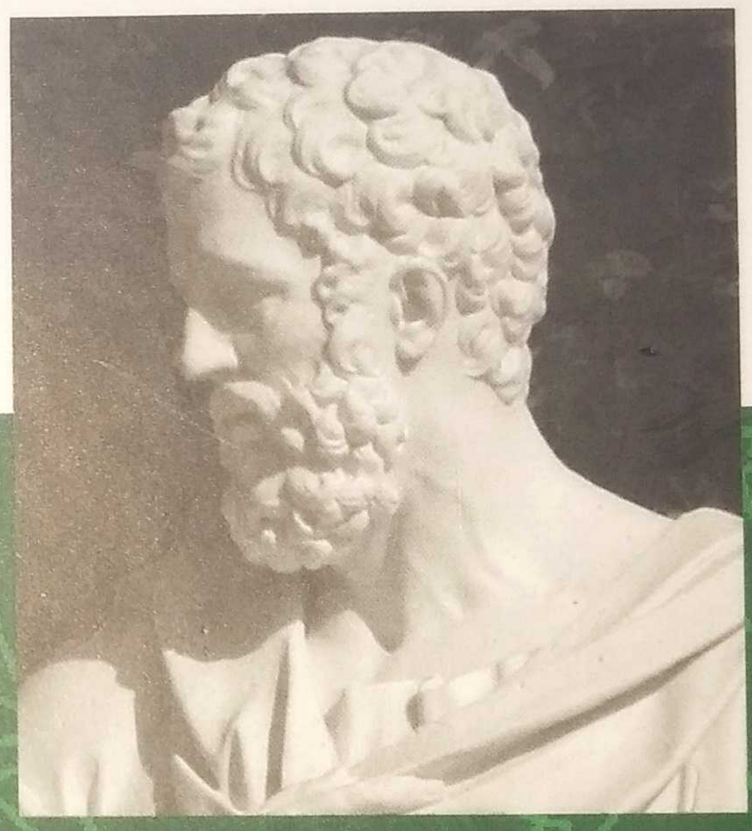
El dominio de las secciones cónicas

# Apolonio



**GENIOS**
de las
**MATEMÁTICAS**

El dominio
de las secciones cónicas

# Apolonio

RBA

© 2017, Pedro Miguel González Urbaneja por el texto
© 2017, RBA Coleccionables, S.A.U.

Realización: EDITEC
Diseño cubierta: Llorenç Martí
Diseño interior: Luz de la Mora
Infografías: Alberto Fregenal, Joan Pejoan
Fotografías: Archivo RBA: 19, 35, 37, 48, 62d, 62i, 97, 121a, 121bi, 121ad, 127, 153b; Sébastien Bertrand: 128; Getty Images: 67b; Pedro Miguel González Urbaneja: 25, 136; NASA: 153ai; Wolfgang Sauber: 39ai, 39ad; SBA73: 151; Shutterstock: 67a, 107; Rolf Süssbrich: 153ad; Vijinn: 29.

Reservados todos los derechos. Ninguna parte de esta publicación puede ser reproducida, almacenada o transmitida por ningún medio sin permiso del editor.

ISBN (Obra completa): 978-84-473-8775-5
ISBN: 978-84-473-9112-7
Depósito legal: B-19462-2017

Impreso y encuadernado en Cayfosa (Impresia Ibérica)

Impreso en España - *Printed in Spain*

# Sumario

**INTRODUCCIÓN** ..... 7

**CAPÍTULO 1** Apolonio, la cumbre de la geometría alejandrina ..... 15

**CAPÍTULO 2** El último prodigio de la geometría griega: «Las cónicas» ..... 41

**CAPÍTULO 3** De intersecciones, segmentos extremos, semejanzas, tangentes y normales ..... 89

**CAPÍTULO 4** Otras obras matemáticas de Apolonio ..... 111

**CAPÍTULO 5** Un legado que continúa presente en las ciencias y el arte ..... 133

**LECTURAS RECOMENDADAS** ..... 155

**ÍNDICE** ..... 157

# Introducción

Apolonio de Perga fue el tercer gran matemático de la edad de oro de la geometría griega. Si Euclides sistematizó el conocimiento matemático y Arquímedes se erigió como el polifacético genio investigador por antonomasia, Apolonio de Perga supo aunar en su persona la especialización técnica y el virtuosismo geométrico, dos virtudes que de su mano alcanzaron la excelencia. Así fue como, casi medio siglo después de Arquímedes, floreció el tercer gran talento del helenismo y el último de la Antigüedad clásica helénica: Apolonio de Perga, quien por sus muchos méritos fue llamado el «gran geómetra».

Cualquier alabanza a la obra matemática de Apolonio está más que justificada. Quizá quien mejor definió el alcance de sus aportaciones fue el matemático e historiador español Francisco Vera Fernández de Córdoba (1888-1967), que en su obra *Breve historia de la geometría* destinó al sabio griego unos términos solo reservados a los personajes más notables de la historia: «Las investigaciones de Apolonio asumen categoría cósmica. Su importancia fue manifiesta en el desarrollo de la mecánica celeste durante el siglo XVII. Sin los estudios del geómetra de Perga, Kepler no hubiera descubierto las leyes de la dinámica planetaria, ni Newton las de la gravitación universal».

Esta sentencia, redactada por un consumado especialista en la materia, certifica que la trascendencia histórica de las contribu-

ciones matemáticas de Apolonio fue verdaderamente extraordinaria. Por ello, resulta sorprendente, y algo descorazonador, que su figura y obra sean menos conocidas que las de Euclides y Arquímedes; una carencia que la presente biografía pretende remediar de forma amena y con la humildad y el rigor necesarios. Todo ello sin olvidar ciertos fundamentos, detalles y anécdotas que, a buen seguro, cautivarán al lector, incluso a quienes ya conozcan el sensacional legado de los grandes matemáticos griegos.

Euclides no necesita presentación. Es bien sabido que en los *Elementos* codificó los fundamentos de la geometría griega de la regla y el compás, y estableció el cuerpo de doctrina central de la totalidad de las ciencias matemáticas elementales. Por su parte, Arquímedes, de obra fecunda y brillante, magnificó el patrimonio matemático heleno y abordó el estudio riguroso de multitud de problemas infinitesimales, que además trató con inefable originalidad. ¿A qué se consagró Apolonio? De forma resumida, puede afirmarse que polarizó su actividad en una dirección casi monotemática y desplegó una sagacidad magistral en sus investigaciones; especialmente, sobre las denominadas «secciones cónicas». En ellas aportó sus bellos descubrimientos acerca de los elementos geométricos de estas curvas: ejes, centros, diámetros, asíntotas, focos, rectas máximas y mínimas —tangentes y normales—, etcétera. Estos hallazgos lo convirtieron en el primer especialista de renombre que registra la historia de la geometría y dan plena justificación a su apelativo de «gran geómetra».

Mientras que la obra de Euclides se centró en la ingeniería lógica de la geometría elemental y la de Arquímedes se orientó a la geometría de la medida, con la introducción del «infinitésimo», los trabajos de Apolonio tuvieron como objetivo la geometría de la forma. De ahí la aparición de las denominadas «coordenadas» en su obra cumbre: *Las cónicas*. Estos elementos matemáticos son premisas indispensables de lo que hoy en día se conocen como «matemáticas superiores». En este sentido, Apolonio podría considerarse un «matemático puro», un virtuoso de la forma.

En general, la vida y el destino de los matemáticos griegos clásicos no fue demasiado interesante, a excepción de Arquímedes, cuya tempestuosa relación política, militar y científica con los romanos resultó intensa. Apolonio, en cambio, se mostró imperturbable frente a los acontecimientos que le tocó vivir y permaneció absorto en sus investigaciones. En palabras del ensayista austríaco Egmont Colerus (1888-1939), autor de una celebrada *Breve historia de las matemáticas*, Apolonio bien pudo ser un hombre ajeno a la vida cotidiana y totalmente juramentado en su amor por las matemáticas: «El incendio de Siracusa no le horrorizó, ni llegó a turbarle la actividad inventiva de Arquímedes; pero se preocupó de llevar a una perfección definitiva las matemáticas helénicas, la geometría eleática y euclídea».

Más allá de estas disquisiciones, la excelencia que Apolonio alcanzó en su obra fundamental, *Las cónicas*, demuestra una plenitud prodigiosa, capaz de borrar por completo cualquier duda que pueda existir acerca de la presunta simplicidad de los matemáticos griegos. La perfección del trabajo de Euclides y Apolonio, como quintaesencia de lo alejandrino, transmite la impresión de que se había alcanzado, en aquel territorio geográfico y cultural, la cumbre del saber. Y así fue. De hecho, causa asombro la vigencia que mantienen unos conocimientos alumbrados hace más de 22 centurias. Su valor, por lo tanto, es inconmensurable.

Cabe señalar que las curvas de segundo orden o secciones cónicas ya habían sido descubiertas por otro matemático griego, Menecmo, perteneciente a la academia platónica. Menecmo las concibió como un artificio para resolver el famoso «problema de Delos» acerca de la «duplicación del cubo», una cuestión que será explicada con detalle a lo largo de estas páginas. A partir de un cono circular recto de una sola hoja, Menecmo cortó el cono por un plano perpendicular a una de sus generatrices. Según el ángulo en el vértice fuera recto, agudo u obtuso, el geómetra platónico obtuvo lo que más tarde Apolonio denominaría, respectivamente, «parábola», «elipse» e «hipérbola», que de momento conformaron una sola rama.

Asimismo, las secciones cónicas fueron estudiadas por Euclides y un matemático contemporáneo suyo, Aristeo, en sendos tratados titulados *Lugares sólidos* —nombre griego para las secciones cónicas, probablemente derivado de la definición estereométrica que dio Menecmo—. Por desgracia, ambos tratados, de los que se

tiene constancia e incluso se conservan fragmentos a través del *Tesoro del análisis*, obra magna del matemático heleno Pappus de Alejandría, están irremisiblemente perdidos.

En cualquier caso, el grado de perfección al que llegó Apolonio no fue superado durante muchísimos siglos. El propio Arquímedes tuvo que emplear las antiguas definiciones de Menecmo y los mencionados teoremas de los tratados sobre secciones cónicas de Euclides y Aristeo para sus obras *Sobre la cuadratura de la parábola* y *El método relativo a los teoremas mecánicos*, donde necesariamente utilizó la expresión «sección de cono rectángulo» para la parábola. Fue Apolonio quien tuvo la idea genial de obtener las tres secciones cónicas a partir de un solo cono oblicuo de base circular. ¿Cómo? Al comprobar que si hacía girar una recta en torno a una circunferencia y mantenía fijo uno de sus puntos, dicha recta generaba por rotación un doble cono, sobre el que se demuestra que, según la inclinación del plano que secciona un único cono acutángulo, aparecen cuatro secciones cónicas: la elipse, la parábola y las dos ramas de la hipérbola —y, como caso particular de la elipse si el plano es horizontal, el círculo—. En este ámbito, Apolonio bautizó a las secciones cónicas con sus nombres actuales.

La influencia histórica de Apolonio, por tanto, es proporcional a su insuperable maestría. Incluso se adelantó a algunas teorías modernas, como la de la polaridad y la generación de las cónicas por haces proyectivos, que establecería de forma rigurosa el matemático suizo Jakob Steiner (1796-1863) más de veinte siglos después. Con su aproximación a los conceptos de «evoluta» y «evolvente», en relación con los centros de curvatura, así como los de «involuta» y «envolvente», en conexión con el estudio de variación de las tangentes, Apolonio se acercó a la geometría diferencial.

Aunque hay que conceder a Apolonio el valor de pionero en muchos ámbitos, debe destacarse la influencia de sus obras en la revolución científica que tuvo lugar a partir del Renacimiento; así lo reconocen diversos sabios e historiadores de la ciencia. Otro rasgo de sutileza muy encomiable fue su definitiva clasificación de los problemas geométricos en «planos», «sólidos» y «lineales», según que su solución exija, respectivamente, rectas y circunferencias, cónicas u otras curvas superiores —como la concoide o



la cuadratriz—. Se trata de una idea muy eficaz de cara a la elección de los instrumentos de solución adecuados. En concreto, supone una extensión de la glorificación platónica de la línea recta y el círculo de los «problemas planos», lo que se traduciría más tarde en el estudio de la irreductibilidad de las ecuaciones a las que conducen los problemas geométricos.

La idea de ajustar la categoría de los instrumentos geométricos a utilizar con la naturaleza de los problemas geométricos a resolver, en la línea de aplicar siempre los medios más simples posibles, no solo constituiría un rasgo distintivo de las futuras geometrías analíticas de los sabios franceses Pierre de Fermat (1601-1665) y René Descartes (1596-1690). Además, resulta un componente esencial de la mejor matemática, ciencia que se eleva con la elegancia y la economía en el razonamiento.

Precisamente, el aspecto más relevante de la influencia de Apolonio en el ámbito estricto de la matemática fue, acaso, su incidencia histórica sobre la geometría analítica. En el estudio de las cónicas, Apolonio consideró ciertas «líneas de referencia» —diámetros conjugados o diámetro-tangente— que juegan un papel de coordenadas. En el segundo caso, al tomar un diámetro y una tangente en uno de sus extremos como «rectas de referencia», las distancias medidas a lo largo del diámetro a partir del punto de tangencia formaron las «abscisas» y los segmentos paralelos a la tangente, interceptada por el diámetro y la curva, las «ordenadas». Para cada cónica, la conocida relación de áreas y longitudes en forma de proporción —propiedad geométrica de la curva equivalente a su definición como lugar geométrico— se traduce en una relación entre las abscisas y las correspondientes ordenadas, lo que Apolonio llamó el *symptoma* de la curva, que no es sino la expresión retórica de la «ecuación analítica» de la curva. Esta, en su evolución histórica, daría lugar a la «ecuación característica» o «propiedad específica de la curva», como la denominó Fermat en su *Introducción a los lugares planos y sólidos*.

El lenguaje de Apolonio es sintético. Utilizó con una pericia asombrosa la técnica pitagórica de la «aplicación de las áreas», pero sus métodos de coordenadas guardan una gran similitud con los de la geometría analítica. Los conceptos y elementos geomé-

tricos introducidos parecen emular la presencia de «sistemas de referencia con coordenadas» —abscisas y ordenadas— con los que se expresan las «ecuaciones de las cónicas», pero estos sistemas de coordenadas aparecieron siempre superpuestos *a posteriori* a las curvas, para estudiar sus propiedades. En la geometría griega, las coordenadas, variables y ecuaciones no eran elementos de partida, sino conceptos subsidiarios. Se derivaban de situaciones geométricas concretas de las curvas que determinan las ecuaciones; y ello, sin que se dé la situación inversa, es decir, que las ecuaciones determinen las curvas, ya que estas siempre se producían mediante una construcción estereométrica —como secciones de un sólido— o de forma cinemática —como composición de movimientos; tal es el caso de la espiral de Arquímedes o la cuadratriz de Dinostrato—. De forma que el conjunto de curvas que manejaron los griegos fue necesariamente muy limitado.

Pese a dichos obstáculos, sobre todo la ausencia de un álgebra simbólica en sentido algorítmico, la obra de Apolonio supuso el primer estadio en la historia de la matemática que trató la aplicación de «coordenadas» al estudio de las propiedades de las curvas. Si bien el discurso retórico sustituyó al simbolismo, y la construcción geométrica a las técnicas algebraicas, las relaciones de áreas y longitudes mediante las que Apolonio expresó las propiedades intrínsecas de las curvas se traducen con gran facilidad. Así lo hicieron Fermat y Descartes, conduciéndolo al ulterior lenguaje del álgebra simbólica de ecuaciones y permitiendo la asociación de curvas y ecuaciones. Esta es la verdadera esencia de la geometría analítica. El trabajo de Apolonio, pues, inauguró la singladura histórica hacia una senda matemática brillante y fundamental: la que apuntó hacia el desarrollo de las geometrías analíticas de Fermat y Descartes.



**ca. 475 a.C.:** Dispersión de la comunidad pitagórica.

**ca. 429 a.C.:** Peste de Atenas. Origen mítico del problema de la duplicación del cubo.

**s. IV a.C.:** Arquitas de Tarento aporta soluciones al problema de la «duplicación del cubo».

**ca. 350 a.C.:** Menecmo descubre las tres secciones cónicas —elipse, parábola e hipérbola— en relación con el problema de la «duplicación del cubo».

**ca. 300 a.C.:** Euclides publica los *Elementos*.

**ca. 262 a.C.:** Apolonio nace en la polis griega de Perga, en la región de Panfilia.

**ca. 200 a.C.:** Apolonio determina en *Las cónicas* las secciones cónicas de forma estereométrica, introduce sus elementos esenciales —ejes, diámetros, tangentes, asíntotas, segmentos máximos y mínimos (normales)— y clasifica los problemas geométricos en el ámbito planimétrico, mediante «coordenadas y ecuaciones».

**ca. 190 a.C.:** Fecha aproximada de la muerte de Apolonio.

**s. II a.C.:** Hipsicles de Alejandría cita una obra perdida de Apolonio: *Sobre la comparación del dodecaedro y el icosaedro inscritos en una esfera*.

**ca. 150 d.C.:** Ptolomeo publica *Almagesto*.

**ca. 325 d.C.:** Pappus de Alejandría compila los saberes geométricos en su extensa *Colección matemática*, una obra fundamental para conocer los trabajos de Apolonio.

**ca. 460 d.C.:** Proclo de Licia escribe sus *Comentarios sobre el primer libro de los Elementos de Euclides* y reseña algunas obras perdidas de Apolonio.

**1600:** François Viète publica *Apollonius Gallus*.

**1629:** Pierre de Fermat da a conocer a sus colegas matemáticos parisinos la *Introducción a los lugares planos y sólidos*, fundamento de su «geometría analítica».

**1637:** Descartes publica *Discurso del método*, que incluye la *Geometría*, la *Dióptrica* y los *Meteoros*.

**1675:** Isaac Barrow condensa los cuatro primeros libros de *Las cónicas*.

**1687:** Isaac Newton publica *Principia*.

**1698:** Antonio Hugo de Omerique publica *Análisis geométrico*.

**1707:** Isaac Newton publica *Arithmetica Universalis*, donde da soluciones analíticas a algunos casos del «problema de Apolonio».

**1710:** Edmond Halley publica la edición príncipe de *Las cónicas*, de Apolonio, y recupera el tratado *Secciones en una razón dada* al traducirlo del árabe al latín.

**1837:** Pierre-Laurent Wantzel demuestra que el problema de la duplicación del cubo no se podía resolver únicamente con regla y compás.

**1921:** Paul Ver Eecke realiza la única traducción completa de *Las cónicas* de Apolonio a una lengua vernácula, el francés.

CAPÍTULO 1

# Apolonio, la cumbre de la geometría alejandrina

Apolonio fue el artífice de una pieza maestra de la matemática universal: *Las cónicas*. La obra se vincula a la resolución geométrica de las ecuaciones cuadráticas y también a la física y la astronomía, ya que las secciones cónicas son las órbitas de los planetas y cometas y la trayectoria de los cuerpos pesados. Además, influyó en que se considerasen las coordenadas a la hora de resolver problemas por la vía de la geometría analítica.

La mayor parte de los exiguos datos que se conocen sobre la vida de Apolonio provienen de unas pocas noticias que el propio autor reseñó en las introducciones de algunos de los ocho libros que componen su obra magna, *Las cónicas*. Contemporáneo de Arquímedes, aunque algo más joven, Apolonio debía rondar entre los veinticinco y los cuarenta años de edad cuando aquel cayó víctima del arma homicida romana, durante la segunda guerra púnica (212 a.C.). Según coinciden los comentarios y estudios cronológicos de los autores más especializados, entre los que destacan Pappus de Alejandría, que vivió en el siglo IV d.C., y Eutocio de Ascalón (ca. 480-540 d.C.), se aventura que Apolonio pudo haber nacido hacia el año 262 a.C. en la región de Panfilia, concretamente en la polis griega de Perga. Hoy en día, este emplazamiento corresponde al sitio arqueológico de Perge, un conjunto de ruinas que resiste al paso del tiempo en las afueras de la ciudad turca de Antalya, al sur del país, un enclave muy turístico y bañado por las aguas del golfo homónimo.

También se estima como cierto y probado que Apolonio estudió en el Museo de Alejandría y coincidió con los discípulos de Euclides. Apolonio residió bastante tiempo en la propia capital alejandrina, donde desarrolló su fértil actividad y ejerció como profesor de geometría durante los reinados de Ptolomeo III Evergetes (247-222 a.C.) y Ptolomeo Filopátor (222-205 a.C.).

Otras localidades vinculadas a su asombrosa trayectoria fueron Éfeso y Pérgamo, que en la actualidad pertenecen a Turquía y obedecen, respectivamente, a los nombres de Efes y Bergama. Buena parte de su obra pudo ser escrita en Pérgamo, una urbe cuyo prestigio era prácticamente similar al de Alejandría: también albergaba una espléndida biblioteca y constituía un emporio académico del saber. Por su parte, en las ruinas de la antigua Éfeso todavía se alza la fachada central de la Biblioteca de Celso. Esta monumental y vistosa estructura, que fotografían a diario numerosos turistas, fue construida como mausoleo en honor a Celso (ca. 45-ca. 120), un senador romano que benefició enormemente a su ciudad natal. La biblioteca llegó a almacenar más de 10 000 rollos. Finalmente, se considera que Apolonio falleció en Alejandría, verdadero epicentro del helenismo en el norte de África, hacia el año 190 a.C. Por desgracia, en la actual ciudad egipcia no se preserva resto alguno de sus célebres museo y biblioteca, de importancia capital para el saber universal y de tan tristes destinos.

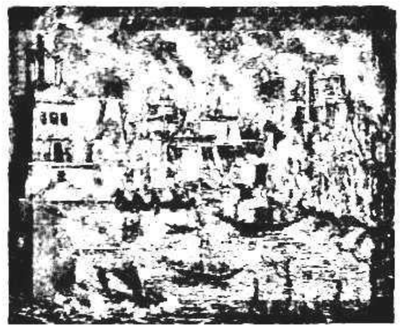
Es un tanto extraño que, en contra de la costumbre, Apolonio no dedicara ningún libro de *Las cónicas* a los reyes de Alejandría, sino a personajes de Pérgamo. Así, agasajó al soberano Eudemo en los libros I y II, mientras que el destinatario de los libros IV-VII fue Atalo —tal vez el rey Atalo I de Pérgamo, que reinó en 241-197—. Al respecto, el historiador y matemático belga George Sarton (1884-1956) especuló con que se produjeron ciertos problemas de trato entre Apolonio y las autoridades del Museo de Alejandría.

Según relató Pappus de Alejandría en la *Colección matemática*, donde efectuó numerosas referencias a la obra de Apolonio, el «gran geómetra» tenía un carácter melancólico e irascible y resultaba difícil tratar con él. En este sentido, el matemático e historiador español Francisco Vera apostilló que «Apolonio tenía un carácter atrabiliario... y era un genio de mal genio».

El nombre de Apolonio resultaba muy frecuente en Grecia, por lo que se suelen cometer errores de atribución iconográfica respecto a otros sabios y eruditos griegos que también se llamaron así: entre ellos, Apolonio de Rodas, Apolonio de Tralles, Apolonio de Atenas, Apolonio de Tyana y Apolonio de Tiro, que aquí solo se citan para evitar las confusiones habituales.



### EL MUSEO Y LA BIBLIOTECA DE ALEJANDRÍA



***El incendio de la Biblioteca de Alejandría*** **(1876), obra anónima perteneciente a una colección privada.**

En el año 323 a.C., a la muerte del gran conquistador Alejandro Magno, uno de sus hombres de confianza, el comandante Ptolomeo I Sóter (m. 283 a.C.), fue designado gobernador de la parte egipcia del Imperio griego. Allí consolidó su poder hacia el año 306 a.C., y se autoproclamó faraón al año siguiente. Lejos de continuar el camino de las armas, Ptolomeo I Sóter favoreció el flujo hacia Alejandría de los mejores científicos, artistas y técnicos de todos los rincones del ámbito helénico. Esta labor de mecenazgo desplazó el centro de la cultura griega de Atenas a Alejandría, transmutada en verdadera capital de la civilización y en el foco más importante de cultura, ciencia y saber del Mediterráneo. El gran acierto de Ptolomeo I Sóter fue impulsar una de las instituciones científicas más relevantes de toda la historia: el Museo de Alejandría, cuya célebre biblioteca, vinculada a él pero a la vez independiente, dispuso del mayor volumen de material bibliográfico conocido: en sus mejores tiempos, superó los 700 000 ejemplares. La ciencia alejandrina recibió una gran influencia aristotélica, presente en gran parte de sus fondos bibliográficos, pero el museo abandonó pronto la búsqueda de la unidad del saber —una exigencia filosófica aristotélica— y se aplicó a una rigurosa investigación de disciplinas concretas: medicina, astronomía, matemáticas, mecánica, etcétera. Gracias a la protección de la dinastía Sóter, el museo siempre acogió a notables científicos y eruditos que se habían especializado en una materia singular. A esta imagen responde con exactitud Euclides, pero también la mayor parte de los grandes matemáticos posteriores a la Academia de Platón: por citar solo unos pocos, Aristarco, Eratóstenes —que llegó a ser el bibliotecario—, Ptolomeo, Diofanto, Pappus y Teón, padre de la malograda Hipatia. Por esta razón, al nombre de todos ellos siempre le acompaña el gentilicio «de Alejandría».

**Un final indigno**

Otros matemáticos importantes, como Arquímedes, Nicómaco, Proclo y el objeto de esta biografía, Apolonio, no vivieron de forma permanente en Alejandría, pero se formaron y trabajaron dentro de este gran emporio científico. Desgraciadamente, la Biblioteca de Alejandría, parcialmente incendiada por las tropas de Julio César en el 48 a.C., no sobrevivió a los saqueos romanos de finales del siglo III, a la destrucción de templos paganos en el siglo IV y a la demolición total y quema de manuscritos durante la invasión árabe del siglo VII.

## MENECMO Y EL «PROBLEMA DE DELOS»

Los antecedentes de *Las cónicas*, de Apolonio, se hallan en el estudio de las cónicas realizado por Menecmo (ca. 350 a.C.) y en el llamado «problema de Delos» o «problema de la duplicación del cubo». En primer lugar, Menecmo, de la Academia platónica, fue el más célebre de los discípulos de Eudoxo (ca. 395-ca. 337 a.C.), además de maestro de Aristóteles y Alejandro Magno, y se le atribuye la introducción de las secciones cónicas, es decir, el descubrimiento de las curvas que después recibieron el nombre de elipse, parábola e hipérbola. Como se verá, el descubrimiento de la llamada «triada de Menecmo» fue un feliz hallazgo en relación con el problema de Delos o de la duplicación del cubo.

«Los griegos descubrieron las cónicas en estado salvaje en los conos o cilindros y Apolonio las cultivó como un mero juego de ingenio. Cuál sería la sorpresa, quince siglos después, cuando Kepler descubrió que la trayectoria del planeta Marte es elíptica, y Galileo, que la caída de las piedras es parabólica.»

— Benoît Mandelbrot, matemático francés (1924-2010).

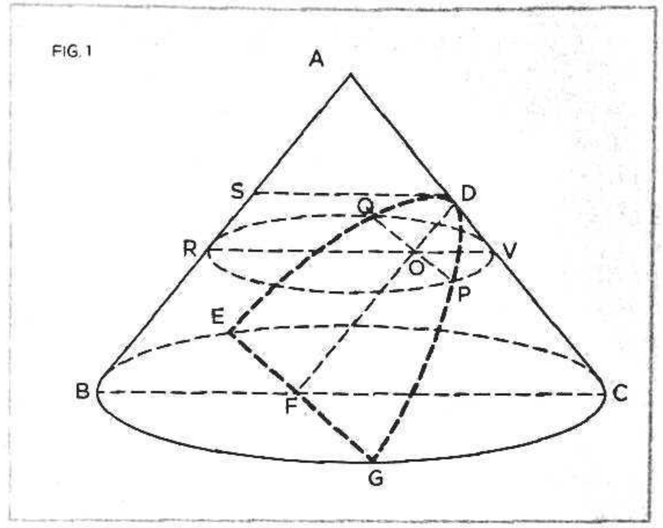
Menecmo detectó que para resolverlo había una familia de curvas adecuadas, los tres tipos de cónicas obtenidos por el mismo método: a partir de la sección por un plano perpendicular a la generatriz de conos rectos de tres tipos, según el ángulo en el vértice fuera agudo, recto u obtuso. Al partir de un cono circular recto de una sola hoja con ángulo recto, descubrió que si se corta el cono por un plano perpendicular a una de sus generatrices, la curva intersección es tal que su «ecuación» —por usar un anacronismo, en términos de geometría analítica moderna— puede escribirse:

$$y^2 = lx,$$

donde l es una constante, que depende exclusivamente de la distancia del vértice del cono al plano de la sección.



Se ignora cómo obtuvo exactamente Menecmo esta propiedad, que depende de algunos teoremas de geometría elemental. Seguramente usó los conocimientos geométricos que resultaban familiares a los matemáticos de la Academia platónica.




Sea, pues, ABC, el cono, y EDG, la curva obtenida al cortarlo por un plano perpendicular en el punto D a la generatriz ADC del cono. Sea P un punto cualquiera de la curva sección y un plano horizontal que corta al cono en la circunferencia PVQR, siendo Q el otro punto de intersección de la curva sección con esta circunferencia. Todo ello se muestra en la figura 1. Por razones de simetría resulta que los segmentos PQ y RV son perpendiculares en el punto O, así que OP es la media proporcional entre RO y OV. Por tanto,

$$OP^2 = RO \cdot OV.$$

Ahora, de la semejanza de los triángulos ΔOVD y ΔBCA se tiene:

$$OV/DO = BC/AB,$$

y de la semejanza de los triángulos ΔSDA y ΔABC se tiene:

$$SD/AS = BC/AB.$$

Al tomar OP = y, OD = x, como «coordenadas» del punto P:

$$y^2 = RO \cdot OV,$$

de modo que, haciendo uso de que RODS es un paralelogramo y, por tanto, RO = SD:

$$y^2 = OP^2 = RO \cdot OV = SD \cdot OV = AS \cdot (BC/AB) \cdot DO \cdot v(BC/AB) = ([AS \cdot BC^2]/AB^2) \cdot x.$$

Como los segmentos AS, BC y AB son los mismos para todos los puntos de la curva EQDPG, se puede escribir la «ecuación de la curva» o «sección del cono rectángulo» en la forma:

$$y^2 = lx,$$

donde $l = AS \cdot BC^2/AB^2$ es la constante que se llamaría *latus rectum*.

De una forma totalmente análoga para conos con ángulo agudo y obtuso en el vértice, Menecmo obtuvo expresiones de la forma:

$$y^2 = lx - (b^2/a^2) \cdot x^2, \text{ sección de cono acutángulo,}$$
$$y^2 = lx + (b^2/a^2) \cdot x^2, \text{ sección de cono obtusángulo,}$$

donde «a» y «b» son constantes y el plano de corte es perpendicular a una generatriz.

Se observa una gran similitud entre los desarrollos de Menecmo en relación a expresiones equivalentes a «ecuaciones» y el uso de «coordenadas», lo que induce a los historiadores a afirmar que ya conocía ciertos aspectos de la geometría analítica. De hecho, si se ignora el lenguaje de esta, se hace difícil explicar el hallazgo de Menecmo. Las cónicas de Menecmo tienen su origen en los intentos de Hipócrates de Quíos (ca. 400 a.C.) de resolución del problema clásico de la duplicación del cubo mediante la interpolación de dos medias proporcionales. De este modo, sea un cubo de arista «a». A partir de la proporción continua:

$$\frac{a}{x} = \frac{x}{y} = \frac{y}{2a},$$

resultado de interpolar dos medias proporcionales entre a y su doble 2a, se obtienen las parábolas:

$$x^2 = ay,\ y^2 = 2ax,$$



y también se obtiene la hipérbola equilátera:

$$xy = 2a^2.$$

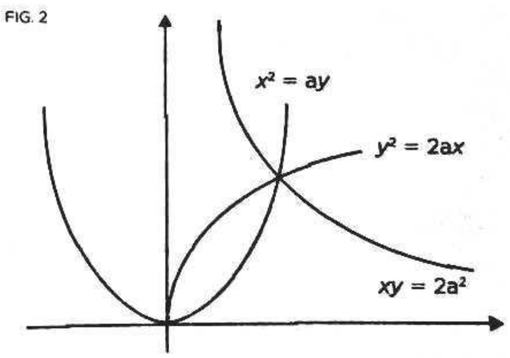
Tanto la intersección de las dos parábolas como la intersección de una de las parábolas y la hipérbola da $x^3 = 2a^3$, es decir, la arista del cubo de volumen doble, como se aprecia en la figura 2.

Menecmo halló lo que en el lenguaje actual se realiza a través de las ecuaciones de las cónicas mediante la construcción de puntos de intersección de las cónicas obtenidas. ¿Cómo? Al desplazar de forma conveniente el plano de corte con el cono para hallar cónicas con *latus rectum*, conforme al objetivo propuesto.

Según los testimonios de Proclo (412-485) y Eutocio de Ascalón, Menecmo fue el primero en descubrir las secciones cónicas. Pero tal vez no sucedió así: con anterioridad, Arquitas de Tarento (ca. 400 a.C.), un gran político reformador y maestro de Platón, había estudiado el problema de la duplicación del cubo y obtenido las dos medias proporcionales mediante una compleja intersección de un cono de revolución, un cilindro de revolución y una superficie tórica. De este modo, Arquitas pudo haber estudiado la elipse como sección oblicua del cilindro. Por otra parte, después de la línea recta, la elipse es la curva más habitual en la experiencia, ya que tanto los objetos circulares mirados de forma oblicua como la sombra que arrojan son elípticos.

En ocasiones se ha especulado incluso con un origen de las cónicas por generación cinemática, como es el caso de las denominadas «cuadratriz de Hipias» y «espiral de Arquímedes». Sin embargo, este extremo parece desmentido ante la persistencia, hasta el siglo XVII, del término «problemas sólidos». Este fue el nombre que dieron los griegos a los problemas que dependían de las cónicas para su resolución, como si se quisiera insistir en su origen estereométrico.

FIG. 2



Las cónicas se definen ahora como lugares de puntos en el plano para los que las distancias a una recta —directriz— y a un punto —foco— están en una determinada razón —excentricidad—. La definición se traslada de forma muy simple al lenguaje algebraico de ecuaciones de la geometría analítica moderna. Además, la trigonometría permite, mediante la rotación de ejes, pasar fácilmente de la ecuación de la hipérbola referida a sus ejes a la referida a sus asíntotas. Por ello impresiona tanto la habilidad que demostró Menecmo al descubrir la más útil familia de curvas de toda la geometría y de toda la ciencia, en ausencia del instrumento y el simbolismo algebraicos.

La sorpresa se amplía al reparar en que, independientemente de su origen plano o estereométrico, Menecmo fue capaz de vincular ambos aspectos de las cónicas. Al efecto, mostró que las secciones de los conos tenían importantes propiedades como lugares planos, lo que podía traducirse en expresiones geométricas básicas —equivalentes a las actuales ecuaciones—. Estas, a su vez, permitían deducir otras innumerables propiedades de las cónicas que serían plasmadas por Apolonio de Perga en los primeros libros de su obra maestra, *Las cónicas*. Bajo este prisma, algunos historiadores modernos reclamaron para los matemáticos griegos la paternidad de la geometría analítica, con el propio Menecmo a la cabeza. No en vano, establecieron como la esencia de esta rama de la matemática el estudio de los lugares por medio de «ecuaciones».

## EL PROBLEMA CLÁSICO DE LA DUPLICACIÓN DEL CUBO

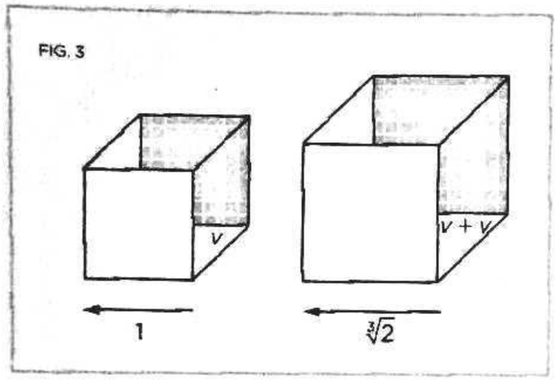
La duplicación del cubo tiene un origen mitológico. Se conoce también como el «problema de Delos», en alusión a la isla griega homónima, patria del dios Apolo, que albergaba un santuario en su honor. Uno de los atributos divinos de Apolo era la curación de enfermedades: en particular, la peste, que de vez en cuando asolaba a la población griega. La plaga se cobró la vida de numerosos atenienses, lo que motivó que una delegación acudiera al oráculo de Apolo, en la isla de Delos, para encontrar una solución que erradicara de una vez por todas aquella pandemia. El oráculo replicó que la peste concluiría cuando se duplicara el altar cúbico del dios Apolo. De inmediato, los atenienses se aplicaron en duplicar las dimensiones del altar, pero esto no resolvió el problema: el altar, lejos de duplicarse, incrementó ocho veces su volumen. Esta contrariedad fue consultada a Platón, para quien la geometría era una exigencia propedéutica de toda ciudadanía y educación. El filósofo replicó que el dios del oráculo no había requerido un altar doble para acabar con la peste de Atenas, sino que había censurado a los griegos su indiferencia y su falta de respeto hacia la geometría como ciencia del espíritu.

### ARQUITAS DE TARENTO

Arquitas de Tarento, en un fresco de la biblioteca de San Lorenzo de El Escorial realizado en 1586 por Pellegrino Tibaldi.

Arquitas de Tarento (ca. 400-350 a.C.) fue un eximio matemático pitagórico que también se desempeñó con éxito en la política e incluso recibió el homenaje de Horacio en sus *Odas*, que lo ensalzó como invicto militar. Uno de sus discípulos fue Platón, a quien inculcó una reverencia casi sagrada hacia las matemáticas. Muy preocupado por la educación, siempre señaló el papel relevante que estas deberían tener en la formación de los jóvenes. Se le atribuye la clasificación de las cuatro ramas del *Quadrivium* medieval: la aritmética, que estudia los números en reposo; la geometría, que estudia las magnitudes en reposo; la música, que estudia los números en movimiento, y la astronomía, que estudia las magnitudes en movimiento. Como geómetra, fue pionero en la valoración del estudio de la estereometría o geometría del espacio tridimensional, una querencia heredada por Platón —*La república*—, y la aplicó de manera asombrosa a la solución del problema de Delos o de la duplicación del cubo. Arquitas introdujo la idea cinemática de considerar una curva generada por un punto en movimiento y una superficie engendrada por una curva en movimiento. En cuanto a su vida personal, cabe destacar que salvó la vida a Platón en uno de los viajes que el filósofo hizo a la península Itálica, ya que intercedió por él ante el tirano Dionisio.

FIG. 3




Los pitagóricos conocían que el cuadrado construido sobre la diagonal de otro tiene doble área que este, es decir, sabían «duplicar el cuadrado» mediante la construcción de la raíz cuadrada de 2. Este problema aparece en el diálogo *Menón*, del propio Platón. Por ello, parece natural que, al generalizar al espacio, se plantearan la duplicación del cubo mediante la construcción de la raíz cúbica de 2 —como se muestra en la figura 3— o equivalente a resolver la ecuación $x^3 = 2$.

El primero en reducir el problema de la duplicación del cubo a la inserción de dos medias proporcionales fue Hipócrates de Quíos (470-410 a.C.). Tras él, numerosos matemáticos se enfrentaron al problema. Por ejemplo, Pappus de Alejandría describió numerosas «soluciones» en el libro III de la *Colección matemática*, y Eutocio de Ascalón hizo otro tanto en su *Comentario* a uno de los mejores tratados de Arquímedes, *Sobre la esfera y el cilindro*. Las aportaciones más relevantes, no obstante, corrieron a cargo de Nicomedes (280-210 a.C.), Herón de Alejandría (10-70 d.C.) y, sobre todo, Menecmo, en relación con la introducción de las secciones cónicas. El clásico problema continuó bullendo en la mente de los matemáticos durante siglos. Finalmente, en 1837, el matemático francés Pierre-Laurent Wantzel (1814-1848), a la luz de los trabajos sobre ecuaciones algebraicas de otro colega que también fallecería de forma prematura, el noruego Niels Henrik Abel (1802-1829), probó lo que ya se sospechaba: que el problema de la duplicación del cubo no se podía resolver únicamente con los instrumentos platónicos, la regla y el compás.

## UN CONO ÚNICO PARA GENERAR LAS CÓNICAS

Durante más de 150 años, las curvas introducidas por Menecmo fueron conocidas a partir de la descripción trivial de la forma cómo habían sido descubiertas, es decir, mediante las perífrasis «sección —perpendicular a una generatriz— de cono acutángulo, rectángulo y obtusángulo» para la elipse, parábola e hipérbola, respectivamente. Fue Apolonio en *Las cónicas* quien no solo demostró que de un cono único pueden obtenerse los tres tipos de secciones al variar la inclinación del plano que corta al cono —un paso decisivo en el proceso de unificar el estudio de los tres tipos de curvas—, sino que también probó que el cono no necesita ser recto. De modo que consideró, asimismo, el cono con dos hojas, lo que identificó las dos ramas de la hipérbola.

Además, Apolonio acuñó para la posteridad los nombres de «elipse», «parábola» e «hipérbola» para las secciones cónicas. A lo largo de la historia de la matemática, los conceptos han sido siempre más importantes que la terminología utilizada, pero en este caso el cambio de nombre de las secciones cónicas tuvo una gran trascendencia. Los términos adoptados, en realidad, no eran nuevos, ya que procedían del lenguaje pitagórico de la solución de ecuaciones cuadráticas. Así, elipse significa «deficiencia»; hipérbola equivale a «exceso» —en el lenguaje ordinario, una hipérbole es una exageración—, y, por último, parábola significa «equiparación». El cambio de nomenclatura implicó una transformación conceptual, toda vez que las cónicas ya no serían descritas constructivamente, sino a través de relaciones de áreas y longitudes que daban en cada caso la propiedad característica de definición de la curva y expresaban sus propiedades intrínsecas. Por ejemplo, la conocida ecuación de la parábola con vértice en el origen es:

$$y^2 = lx,$$

donde l es el *latus rectum* o «parámetro doble», representado por 2p.

Esta expresión de la parábola en forma de «ecuación» sintetiza precisamente el farragoso y larguísimo enunciado que figura en *Las cónicas* en forma de propiedad que cumple «la sección cónica» considerada, que Apolonio bautizó con el nombre de «parábola». Este enunciado, muy resumido, viene a decir que:

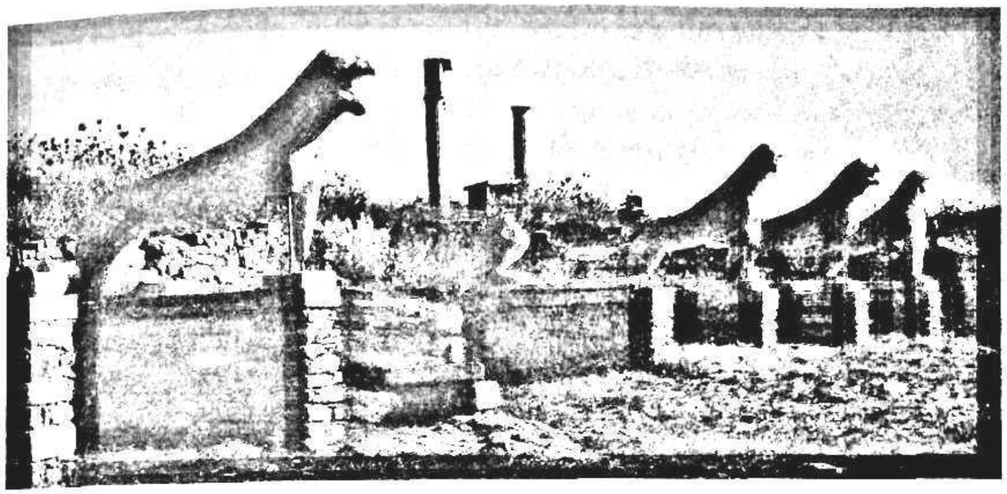
— La parábola tiene la propiedad característica de que para todo punto tomado sobre la curva, el cuadrado construido

## UNA SATISFACCIÓN PARA EL SANTUARIO DE DELOS

La historia legendaria del «problema de Delos» inspiró el relato de varios matemáticos, historiadores y escritores clásicos, entre los que se puede destacar al historiador Plutarco (ca. 46-ca. 119 d.C.), y a Eratóstenes de Cirene (276-194 a.C.). Este último dirigió una carta a Ptolomeo III Evergetes donde recordó las palabras que un poeta atribuyó al rey Minos al comprobar que la tumba para su querido hijo Glauco tenía en cada uno de sus lados una longitud de cien pies: «Escaso espacio en verdad concedéis a un sepulcro real; duplicadlo, conservando siempre la forma cúbica, duplicad de inmediato a cada uno de los lados». El poeta añadía que en este deseo, el rey Minos «se engañaba, puesto que duplicando los lados de una figura plana esta se cuadruplica, mientras que si es sólida se octuplica», y que como consecuencia de la imposición del soberano, «se agitó entonces entre los geómetras la cuestión de cómo podía duplicarse una figura sólida dada cualquiera, manteniendo su especie. Y este problema se llamó de la duplicación del cubo». En esa misma carta, Eratóstenes de Cirene explicó la aportación dada por Hipócrates de Quíos (470-410 a.C.), que fue el primero en reducir el problema de la duplicación del cubo a la inserción de dos medias proporcionales: «Después de muchos titubeos fue Hipócrates de Quíos el primero que encontró que si entre dos rectas, una doble de la otra, se insertan dos medias proporcionales, se duplicará el cubo, con lo que convirtió una dificultad en otra no menor».

### «Lo logró sin esfuerzo»

La carta de Eratóstenes especificó que los habitantes de Delos, instados por el oráculo a duplicar cierto altar, se encontraron ante las mismas dificultades y enviaron emisarios a los geómetras agrupados alrededor de Platón en la Academia «a fin de excitarlos en la búsqueda del deseo del oráculo». A continuación, y siempre



**Restos arqueológicos de la Terraza de los Leones, en el santuario de la isla griega de Delos.**

según el relato, dio los nombres de quienes «tratando de insertar dos medias proporcionales entre dos rectas» dieron con la solución teórica: Arquitas de Tarento, que «lo consiguiese con el semicilindro», y Eudoxo, que hizo lo propio «con ciertas líneas curvas». Eratóstenes de Cirene remató la carta indicando que «a ellos les sucedieron otros tratando de perfeccionar las demostraciones, aunque no en la realización de las construcciones y su adaptación a la práctica», y no dejó lugar a dudas en su apostilla final de quién sí obtuvo un éxito total: «Si se exceptúa quizás a Menecmo, que lo logró sin esfuerzo».



sobre su ordenada $y$ es exactamente igual al rectángulo construido sobre la abscisa $x$ y el *latus rectum*, designado por l.

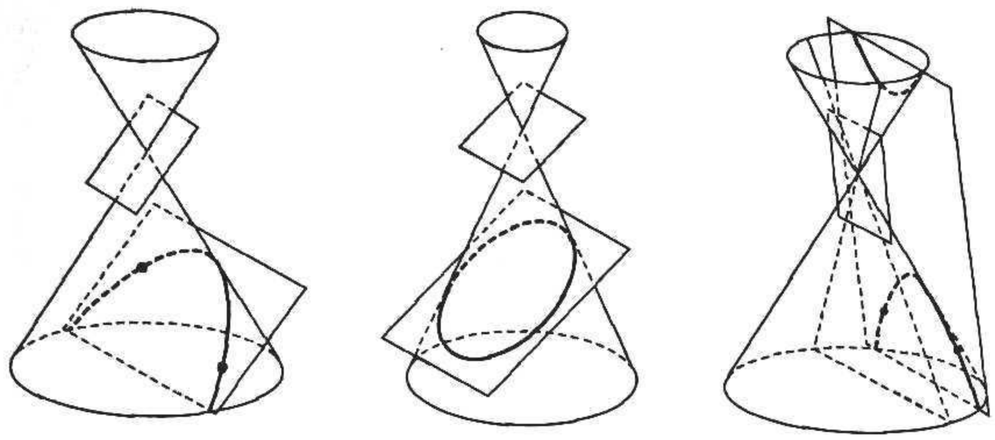
De forma análoga, Apolonio hizo lo propio para la hipérbola y la elipse en dos proposiciones que redactó en un lenguaje retórico complejo y que se pueden simplificar así:

En la sección cónica considerada —llamada hipérbola, respectivamente llamada elipse—, el cuadrado de la ordenada equivale a un área rectangular aplicada siguiendo el *latus rectum*, es decir, teniendo el *latus rectum* como altura, y teniendo la abscisa como base, aumentada —respectivamente, disminuida— de otra área semejante a la que tenga el eje transverso o diámetro como base, y la mitad del *latus rectum* como altura.

Si se simplifica todavía más mediante «ecuaciones», como en el caso de la parábola, el complejo lenguaje de Apolonio, puede designarse: para la hipérbola, $a$, como el eje transverso o diámetro, y $b$, como el eje no transverso. Para la elipse, $a$ y $b$, como los ejes. Para ambas cónicas, la ordenada será $y$; la abscisa, $x$; y el *latus rectum*, l. Lo cual se puede traducir en las relaciones:

Hipérbola: $y^2 = lx + (b^2/a^2) \cdot x^2$, o bien, $[(x+a)^2/a^2] - [y^2/b^2] = 1$.
Elipse: $y^2 = lx - (b^2/a^2) \cdot x^2$, o bien, $[(x-a)^2/a^2] + [y^2/b^2] = 1$.

FIG. 4



**Parábola**
El plano de corte es paralelo a una sola generatriz.

**Elipse**
El plano de corte no es paralelo a ninguna generatriz.

**Hipérbola**
El plano de corte es paralelo a dos de sus generatrices.

que son las «ecuaciones» de la hipérbola y de la elipse, respectivamente, referidas a uno de sus vértices como «origen de coordenadas», donde concurren como «ejes de coordenadas» un diámetro y la tangente a la cónica en su extremo, y donde el *latus rectum* es:

$$l = 2b^2/a.$$

La construcción de Apolonio de las tres secciones cónicas mediante un cono único variando la inclinación del plano que corta al cono —en el caso particular de ser obtenida mediante un cono recto—, queda ilustrada en la figura 4.

## EL PLAN DE OBRA DE APOLONIO

El propio Apolonio explicó las circunstancias de la elaboración y la composición de su obra en el primero de los ocho libros que la componen. Se sabe que al residir en Alejandría fue visitado por un geómetra llamado Naucrates, quien le exhortó a emprender el proyecto. Probablemente, Apolonio escribió un apresurado borrador en ocho libros de *Las cónicas* y, más adelante, ya en Pérgamo, debió pulir y perfeccionar el contenido. De esta forma, reveló sus intenciones en la introducción, que dedicó a Eudemo:

> Como cuando nos vimos en Pérgamo supe que querías conocer lo que he escrito sobre las cónicas, te envío, corregido, el primer libro y te enviaré los otros cuando pueda repasarlos, porque creo que no habrás olvidado que me comprometí a escribirlos a ruego del geómetra Naucrates cuando fue mi huésped en Alejandría, y me vi obligado a ponerle al corriente de lo que había redactado en ocho libros, y sin revisarlos, cuando estaba a punto de embarcarse. Ahora que dispongo de tiempo, no los repartiré sin haberlos retocado; pero como algunos de mis amigos tienen los dos primeros sin corregir, no te extrañe si encuentras modificado algún pasaje.

En dicha introducción, además, Apolonio describió cuál iba a ser el contenido de su obra, que se inauguraba así:

> De los ocho libros, los cuatro primeros contienen los elementos de la teoría: el primero trata de la generación de las tres secciones y de las opuestas, así como de sus principales propiedades que he estudiado con mayor detenimiento y de una manera más general que los geómetras que se han ocupado de este asunto antes que yo.

A continuación, detalló el objetivo del segundo libro, que «contiene lo relativo a los diámetros, ejes y asíntotas de las secciones cónicas y algunas cosas necesarias para los diorismos, y en él verás lo que yo entiendo por diámetros y ejes». Más extensa es la descripción de su tercer libro, donde ya apuntó a sus descubrimientos. Al respecto, afirmó que «comprende muchos y muy curiosos teoremas útiles para la construcción de los lugares sólidos; bastantes son bellos y nuevos».

Sus notas sobre el cuarto libro adelantaron la novedad del trabajo realizado, por cuanto «trata de las intersecciones de las cónicas entre sí y con el círculo y otros temas, ninguno de los cuales ha sido estudiado por mis predecesores, especialmente el relativo al

número de puntos en que una cónica o circunferencia puede cortar a la hipérbola». Después de comentar que los libros restantes «se refieren a la más alta ciencia: uno trata de una manera general los máximos y mínimos; otro investiga las secciones cónicas iguales y semejantes; otro se refiere a los teoremas necesarios para resolver cuestiones determinadas, y el último está dedicado a los problemas que se prestan a discusión», concluyó que «por lo demás, no he publicado todas estas cosas con la intención de eliminar a quienes las aborden el derecho de apreciarlas según su parecer».

«Al redactar este libro, he comprendido que la regla para construir el lugar de tres y cuatro líneas [problema de Pappus] solo la dio Euclides en un caso particular y de una manera casual y poco feliz, porque la solución completa exige el conocimiento de los teoremas que yo he descubierto.»

— APOLONIO DE PERGA.

De esta manera, Apolonio dio a conocer que sabía mucho más del tema de las cónicas de lo que hasta entonces se conocía y, sobre todo, lo realizó de un modo mucho más organizado. Fue por ello que se decidió a publicarlo y explicitó de entrada el contenido de su obra en el preámbulo del Libro I.

## CONTENIDO Y VICISITUDES HISTÓRICAS

Los cuatro primeros libros de *Las cónicas* conformaron una introducción elemental y descansaron, en gran parte, sobre materia conocida, aunque no tan bien organizada. No obstante, fue a partir del Libro V que se expusieron los hallazgos más novedosos e importantes de toda la obra.

El Libro I arranca con la generación de las cónicas. Una vez obtenidas las relaciones básicas —entre lo que se incluye las «coordenadas» de un punto de la curva en el plano, expresadas por las «ecuaciones» descritas anteriormente— mediante consideraciones



estereométricas espaciales, Apolonio se dedicó a estudiar por métodos planimétricos las propiedades fundamentales de las cónicas. Lo hizo a base de incluir tangentes y diámetros conjugados, a partir de esas «ecuaciones» planas y obviando toda referencia explícita al cono generador. Apolonio empleó de forma sistemática un par de diámetros conjugados o un diámetro y una tangente como equivalente de un «sistema de coordenadas oblicuas», tras demostrar previamente que si se traza una recta por un extremo de un diámetro de una elipse o de una hipérbola, paralela a su diámetro conjugado, la recta trazada es tangente a la cónica. El «sistema de referencia» diámetro-tangente se muestra de una utilidad muy significativa ante la invariancia de la «ecuación» de la cónica frente a un «cambio de referencia» diámetro-tangente de un punto a otro punto de la cónica.

Por su parte, el Libro II abunda en nuevas propiedades, ofrece un estudio exhaustivo de las asíntotas de la hipérbola y estudia el problema de trazar una tangente que forme un ángulo dado con el diámetro que pasa por el punto de contacto.

El Libro III trata en primer lugar las propiedades de triángulos y cuadriláteros determinados por tangentes y diámetros conjugados y otras propiedades de las tangentes. Se estudia la hipérbola como lugar de puntos tales que $xy$ = constante, donde $x$ e $y$ son abscisa y ordenada respecto a los ejes constituidos por las asíntotas. A continuación, Apolonio estudió una serie de hermosas propiedades focales, que permiten el trazado de cónicas mediante una composición de movimientos continuos y, además, sirven para definirlas de forma planimétrica como «lugares geométricos». En cuanto al Libro IV, sus páginas acogen el estudio de los puntos de intersección de las cónicas y exhiben un método de trazar dos tangentes a una cónica desde un punto.

El Libro V es una de las principales obras maestras de la geometría griega. Está dedicado a los «segmentos máximos y mínimos», es decir, a la distancia máxima y mínima de un punto a los de una cónica —las rectas normales—. Sin duda, este libro aloja el germen de la teoría de evolutas y evolventes que figura en *Horologium oscillatorium* (1673), obra del físico, astrónomo y matemático neerlandés Christiaan Huygens (1629-1695). Al intuir el concepto de curvatura, Apolonio se situó en las raíces de la geometría diferencial.

Después de recurrir a métodos puramente sintéticos, obtuvo la evoluta de las cónicas como lugar de los centros de curvatura, mediante la determinación del número de normales distintas desde cada punto. Además, construyó la normal a una cónica desde un punto exterior mediante la intersección de la cónica dada con una hipérbola equilátera, llamada «hipérbola de Apolonio» asociada al punto.

El esplendor de este quinto volumen no desmerece la importancia de los siguientes. Así, el Libro VI está dedicado a la igualdad y semejanza de cónicas, y a lo largo de su desarrollo Apolonio resolvió un problema meritorio: dados una cónica y un cono circular recto, hallar una sección del cono que sea igual a la cónica dada. Acto seguido, el Libro VII relaciona numerosas propiedades de los diámetros conjugados; entre ellas, destacan la constancia de la suma en la elipse y la diferencia en la hipérbola de los cuadrados de los diámetros conjugados. Las conjeturas sobre el Libro VIII apuntarían a nuevos problemas sobre diámetros conjugados y la resolución de cuestiones pendientes en los libros anteriores.

Por desgracia, de los ocho libros de *Las cónicas* de Apolonio solo se conserva el texto griego original de los cuatro primeros. Los tres siguientes se conocen por sus traducciones árabes, mientras que el octavo y último está irremediablemente perdido. La influencia de Apolonio fue decisiva sobre los geómetras griegos y orientales posteriores —árabes y persas—, quienes comentaron con frecuencia el tratado de *Las cónicas*.

El primer estudioso de Apolonio fue Pappus de Alejandría, que comentó buena parte de su obra en el *Tesoro del análisis*, del libro VII de su *Colección matemática*. Por su parte, Serenus Antisensis (ca. 300-ca. 350) escribió un opúsculo, ahora perdido, que al parecer completaba los teoremas de Apolonio relativos a la elipse. Más tarde, Suidas, un lexicógrafo griego del siglo X, afirmó en su conocido *Lexicón* que Hipatia de Alejandría (m. 415) se ocupó de *Las cónicas* hasta que murió lapidada a manos del populacho. Asimismo, también se dispone del *Comentario* de Eutocio de Escalón. Después de un largo paréntesis, el interés por la obra de Apolonio resurgió de la mano de los sabios orientales, que la difundieron por Occidente entre los siglos IX y XIII en traducciones al árabe. En el siglo XII apareció la primera versión completa de



### LOS *ELEMENTOS*, DE EUCLIDES

Los *Elementos*, la obra cumbre del geómetra platónico Euclides, presenta una magnífica estructura de ingeniería lógica y matemática hilvanada en 465 proposiciones, todas verdaderas, que han resistido la implacable prueba del tiempo. Ninguna otra obra científica coetánea resiste una mínima comparación con los *Elementos*, que marca uno de los hitos más importantes de la historia de la cultura, la ciencia y el pensamiento. Como codificación de los fundamentos de la geometría elemental, la geometría de la regla y el compás, estableció un férreo paradigma de exposición y demostración en matemáticas. Erigida como una obra maestra canónica, vigente e insuperada durante 2300 años, ha sido para profesionales y aficionados a las matemáticas, lectura tras lectura, una fuente inagotable de recursos geométricos, de fruición intelectual y de goce supremo por su agudeza, el ingenio mostrado y una elegante argumentación matemática. Los *Elementos* de Euclides es el libro que más veces se ha editado, después de la Biblia, y constituyó, con una autoridad indiscutida, el cuerpo de doctrina central de la totalidad de las ciencias matemáticas elementales hasta mediados del siglo XIX, así como el principal vehículo de la transmisión del saber matemático hasta mediados del siglo XX. Aún hoy, conforma el núcleo esencial de la matemática elemental, que determina gran parte de la temática escolar básica y secundaria.

Papiro con un fragmento de los *Elementos* de Euclides hallado en el yacimiento egipcio de Oxirrinco.

*Las cónicas* en latín, gracias al más fecundo traductor de la escuela de Toledo: Gerardo de Cremona (m. 1187). En cuanto al primer texto griego de *Las cónicas*, reapareció en Occidente en 1427 gracias al humanista italiano Francisco Filelfo (1398-1481). En 1675, el profesor y matemático británico Isaac Barrow (1630-1677) publicó un manual de geometría que condensó de forma canónica los cuatro primeros libros de *Las cónicas*. Sin embargo, el esfuer-

zo de estos eruditos por ofrecer la traducción más fiel de los cuatro primeros libros no palió el vacío de los cuatro volúmenes desconocidos que faltaban. Algunos geómetras intentaron reconstruirlos de forma conjeturable, como Vincenzo Viviani (1622-1703), cuyo Libro V amplió notablemente el conocimiento que existía sobre los logros de Apolonio. En 1658, el geómetra italiano Borelli halló un manuscrito árabe, datado en el año 994, que resumía los libros V, VI y VII y que fue traducido al latín y publicado en 1661. Pocos años más tarde, ocurrió otro tanto con un manuscrito similar, lo que abrió el apetito de los científicos: si se habían encontrado tres libros, aunque de forma parcial y en árabe, ¿por qué no el octavo y último? Finalmente, las esperanzas se desvanecieron: el Libro VIII nunca apareció. En 1710, quizá como compensación, el astrónomo y físico británico Edmond Halley (1656-1742) regaló al mundo la que se considera la edición príncipe de *Las cónicas*.

## UNA OBRA CAPITAL PARA LA GEOMETRÍA

A nadie, por poco interesado e informado que esté de las cuestiones más profundas de la geometría, le extraña que se hable de la importancia de la circunferencia. No solo es la más sencilla de las cónicas y la quintaesencia de la regularidad y la simetría, sino que está profundamente arraigada en la naturaleza y en el diseño. Con mayor intensidad pensaba en ella el hombre de la Antigüedad, que imaginaba los cuerpos celestes girando en órbitas circulares. ¿Y qué decir de la vida ordinaria actual, con el giro de las puertas, las ruedas, las columnas o el compás como instrumento básico? Apolonio tuvo motivos profundos para desarrollar su teoría de las secciones cónicas, la cual empujó históricamente a:

a) La resolución de ecuaciones cuadráticas, que desde la época pitagórica se había desarrollado como «álgebra geométrica» con la llamada «aplicación de las áreas».
b) El grupo de los «tres problemas clásicos» —«cuadratura del círculo», «trisección del ángulo» y «duplicación del cubo»—, cuya resolución exigía ecuaciones de un grado superior al segundo.

Estos problemas fueron suscitados por la Academia platónica, que advirtió la necesidad de aplicar intersecciones de diversas secciones cónicas. Como se señaló en el caso de la duplicación



### HALLEY APRENDIÓ ÁRABE PARA TRADUCIR A APOLONIO

Edmond Halley, en un retrato realizado hacia 1687 por Thomas Murray.

El apellido del astrónomo y físico británico Edmond Halley (1656-1742) es bastante conocido por el gran público a causa de un famoso cometa que orbita alrededor del Sol aproximadamente cada 77 años. En cambio, se conoce mucho menos, incluso en ámbitos académicos, la devoción que tuvo Halley por la obra de Apolonio de Perga, al extremo de que se propuso realizar la mejor traducción posible de los siete libros conservados de *Las cónicas*. Halley comenzó la tarea en 1704 y su determinación fue tan grande que decidió aprender árabe, para traducirlos él mismo. Seis años después, su esfuerzo y talento se vieron recompensados con la publicación de un trabajo que resultó magistral. La primera parte del mismo recogía el texto griego de los cuatro primeros libros, la versión latina corregida de Federico Commandino, los textos griegos de Pappus y Eutocio y los textos griegos y sus versiones en latín. La segunda parte solo puede calificarse de sensacional: no solo ofrecía su traducción al latín de los libros V, VI, VII, basada en la versión árabe de Thabit ibn Qurra, sino también una reconstrucción conjeturable del libro perdido, el anhelado Libro VIII, que realizó él mismo. La tercera y última parte, complementaria, contenía los libros de Serenus Antisensis sobre la sección del cilindro y del cono, en su original griego y su traducción latina. Como curiosidad, cabe señalar que en la ilustración del frontispicio de *Las cónicas* traducidas por Halley aparecen unos náufragos que contemplan en la orilla figuras sobre hipérbolas de Apolonio, lo que da pie a que en la base de dicha ilustración se lea en latín «Aristipo, filósofo socrático, habiendo naufragado en el mar de Rodas, y habiendo observado en la playa dibujos con diseños geométricos, se dice que exclamó ante sus compañeros: estamos de buena esperanza, ya que veo huellas de hombre». Estos términos, que ensalzan la geometría como ciencia del espíritu y signo de civilización, fueron tomados por Halley de la obra *De Architectura*, de Vitruvio.

del cubo, estas habían llevado a su descubrimiento por Menecmo. No obstante, hay muchos más motivos por los que las secciones cónicas de Apolonio ocupan un lugar de privilegio geométrico entre todas las posibles curvas:

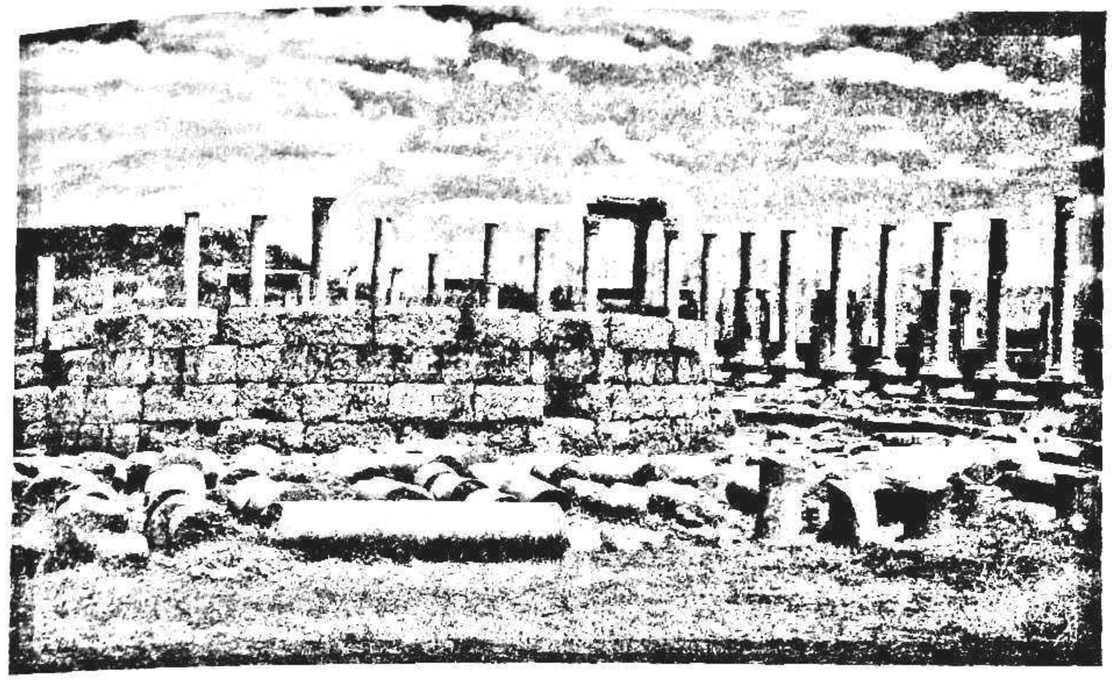
a) Desde la propia definición, establecida por Apolonio, se sabe que representan de forma completa todo el campo de las ecuaciones de segundo grado.
b) Las secciones cónicas son las órbitas de los planetas y cometas, las formas de los cuerpos celestes de rotación y la trayectoria de los cuerpos pesados.
c) La importancia trascendental de las cónicas estriba en que la principal capacidad de percepción del hombre reside en el ojo. Los rayos luminosos que penetran en él y parten de él para forjar la visión forman un cono según las leyes de la refracción y convergencia de una lente biconvexa. Toda imagen que le llega mediante ese cono de rayos se presenta bajo la forma de una sección cónica. Todo el mundo visible es un «universo de secciones cónicas».

El punto de partida histórico de todo este despliegue de conocimiento geométrico, que culminaría en la geometría proyectiva del siglo XIX, no fue otro que la sagacidad de Apolonio, al manejar haces de rayos y relacionarlos con las secciones cónicas.

## EL TEMIDO INFINITO Y LA FICCIÓN DE LAS PARALELAS

*Las cónicas* revolucionó la geometría clásica, ya que hizo tambalearse los postulados de Euclides y suscitó grandes «provocaciones geométricas», como la insinuación del infinito y de la irrealidad óptica de las paralelas. En el estudio de las secciones cónicas, las asíntotas son dos rectas que, bajo ciertas condiciones, van acercándose de forma progresiva, cada vez más, hacia el infinito, a los dos brazos de la hipérbola; pero sin llegar nunca a tocarlos, como lo hace una tangente, o a cortarlos, como hace una secante. Segu-





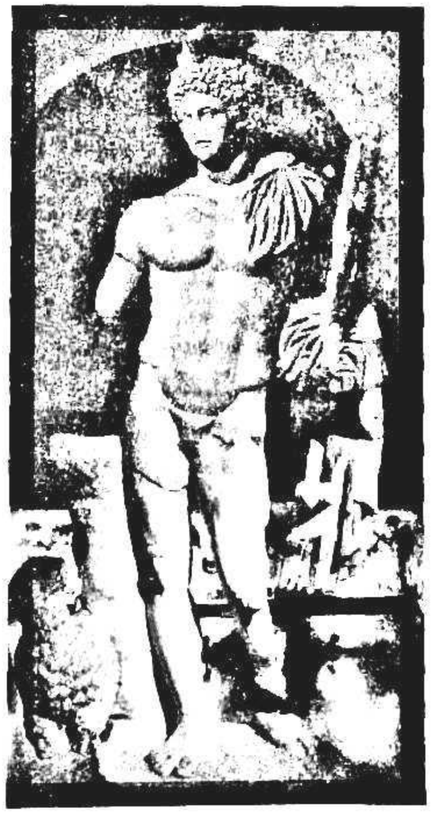


FOTO SUPERIOR:
**Restos del ágora de Perga en las afueras de la ciudad turca de Antalya. Esta fue la cuna natal de Apolonio.**

FOTO INFERIOR IZQUIERDA:
**Gran busto de Alejandro Magno en el Museo Arqueológico de Antalya, donde se conserva el arte helenístico de Perga.**

FOTO INFERIOR DERECHA:
**Estatua hallada en Perga del dios Hermes, mensajero divino y protector del comercio y la fecundidad.**

ramente descubiertas por Apolonio, su simple existencia agitó el fantasma del infinito. Eudoxo había introducido un paliativo ante la presencia del inconmensurable, el de «aproximarse tanto como se quiera», presente en la *Teoría de la proporción* y el *Método de exhaución* de Euclides. Pero en este nuevo ámbito geométrico ya no servía porque, con las asíntotas... ¿dónde acaba tal «aproximación» o «acercamiento»?

También irrumpió otro problema relacionado con el «postulado de las paralelas». Ahora, entre las líneas que se cortan y las que se mantienen siempre a la misma distancia, había una tercera clase de líneas, inoportuna e inconveniente, que ni se cortan ni se mantienen siempre a la misma distancia entre sí. Según la expresión euclídea, la continua aproximación de dos líneas era condición necesaria y suficiente de su intersección, mientras que una distancia constante lo era de paralelismo. De pronto, con las asíntotas, ni siquiera en la aproximación continua se llegaba necesariamente en todos los casos a un punto de intersección. Cabría objetar que en Euclides se trataba de dos rectas, mientras que con las asíntotas se trabajaba con una curva y una recta, que pueden perfectamente seguir leyes distintas al caso de dos rectas.

La aparición de las asíntotas obligó a la geometría a cuestionarse durante siglos el postulado de las paralelas. Este contradice la evidencia de los sentidos. El mundo de la percepción visual, «el mundo de las secciones cónicas», no conoce las paralelas. Nadie que contempla el mundo real con su mirada las ha visto nunca. Son una condición creada por el hombre, una ficción, y no una realidad óptica. Con Apolonio, por tanto, no solo concluyó la época heroica de las matemáticas griegas, sino que arrancó la discusión de dudas esenciales para la ciencia. Estas, abordadas con espíritu investigador y riguroso, son una puerta abierta a los más grandes avances y progresos, no en vano llevan al conocimiento. Y Apolonio, como todos los grandes matemáticos, también dudó.



CAPÍTULO 2

# El último prodigio de la geometría griega: «Las cónicas»

*Las cónicas* es una pieza maestra de la geometría de la medida, con un lenguaje y un desarrollo tan bello como complejo. De los siete libros conservados que la componen, en los tres primeros se definen y demuestran mediante proposiciones y teoremas algunas propiedades de la parábola, la hipérbola, la elipse y las dos ramas de la hipérbola. También se profundiza en los elementos geométricos relacionados con las tres secciones cónicas.

Toda la geometría comprende dos grandes capítulos: la geometría de la medida y la geometría de posición. Ambas, en sus partes elementales, se encuentran desarrolladas en los *Elementos*, la obra magna de Euclides. Por el contrario, las partes más elevadas de la primera se encuentran en el legado matemático del más ilustre científico de la Antigüedad, Arquímedes, mientras que el más célebre representante de la segunda es Apolonio, creador de *Las cónicas*. Sin duda, la importancia capital de esta obra para las matemáticas, y en concreto para la geometría, merece profundizar en sus contenidos de forma exhaustiva: solo así se podrá comprender, en su totalidad, las aportaciones que realizó el geómetra de Perga. No resulta fácil conseguirlo. La tarea es ardua, ya que el texto original, como se ha señalado, presenta una dificultad extrema, incurre en pasajes muy densos y puede desanimar a cualquiera, máxime si no se posee un elevado nivel matemático y la paciencia requerida; dos virtudes que no siempre van aparejadas.

Esta razón es la que mueve a ofrecer aquí, en aras de la claridad, un esfuerzo de simplificación del contenido de *Las cónicas*, así como una adaptación al lenguaje actual. El propósito no es otro que facilitar que el lector conozca las contribuciones de Apolonio de forma más directa, sin complicaciones adicionales, y así poder apreciarlas en toda su belleza; y al cabo, entenderlas sin reservas y poder incorporarlas a sus propios conocimientos matemáticos.

A lo largo de este capítulo, por tanto, se abordará de manera detallada los tres primeros libros que componen *Las cónicas*, cuya extensión, definiciones y proposiciones así lo requieren. Los siguientes libros, como es lógico, hallarán espacio en los próximos capítulos.

## EL LIBRO I DE «LAS CÓNICAS»

El Libro I de *Las cónicas* contiene 60 proposiciones y comienza con 8 definiciones relativas a la generación de las superficies y del volumen de los conos rectos y oblicuos, de los diámetros conjugados y de los ejes de las líneas curvas. La definición 1 fue redactada en estos términos, donde el «gran geómetra» especificó el sentido que quería dar a «superficie cónica», «vértice» y «eje» en la misma:

> Si desde un punto no situado en el plano de un círculo se traza a la circunferencia de este una recta, se prolonga en sus dos direcciones y, permaneciendo fijo el punto, se hace recorrer a la recta la circunferencia hasta que vuelva a su posición inicial, llamo «superficie cónica» a la que, descrita por la recta, se compone de dos superficies opuestas por el vértice que se extienden al infinito, lo mismo que la recta generatriz; y llamo «vértice» de la superficie al punto fijo, y «eje» a la recta trazada por este y el centro del círculo.

Por su parte, las definiciones 2 y 3 versan sobre el cono. La primera de ellas reza así, en palabras del propio Apolonio:

> Llamo «cono» a la figura limitada por el círculo y por la superficie cónica comprendida entre el vértice y la circunferencia del círculo; «vértice» del cono, al que lo es de su superficie; «eje», a la recta trazada desde el vértice al centro del círculo, y «base», a este.

En cuanto a la definición 3, Apolonio denominó «cono recto» al que tiene el eje perpendicular a la base, y «oblicuo», al que no lo tiene.



Las definiciones 4, 5 y 6 se centran en el concepto de «diámetro». A continuación, se insertan dos notas aclaratorias para la primera de ellas, la definición 4; todo el resto son las palabras que empleó el matemático alejandrino:

> Llamo «diámetro» de toda línea curva situada en un solo plano a la recta que, trazada en la curva, divide en dos partes iguales a todas las paralelas a una recta cualquiera en la curva; «vértice» de esta al extremo de esa recta [es decir, del diámetro] situada en la curva, y, por último, llamo «rectas trazadas ordenadamente al diámetro» [lo que hoy se llaman «ordenadas»] a las paralelas.

Por su lado, la definición 5 prosigue así:

> De igual modo, llamo también «diámetro» de dos líneas curvas situadas en un mismo plano, por una parte a la recta transversal que, cortando a estas dos líneas, divide en dos partes iguales a todas las paralelas a una recta cualquiera en cada curva, y «vértices» de esta a los extremos del diámetro que están en ellas; y por otra parte a la recta que, situada entre ambas curvas, corta en dos partes iguales a todas las paralelas a una recta cualquiera interceptadas por las líneas, y, por último, llamo «ordenadas» a las paralelas.

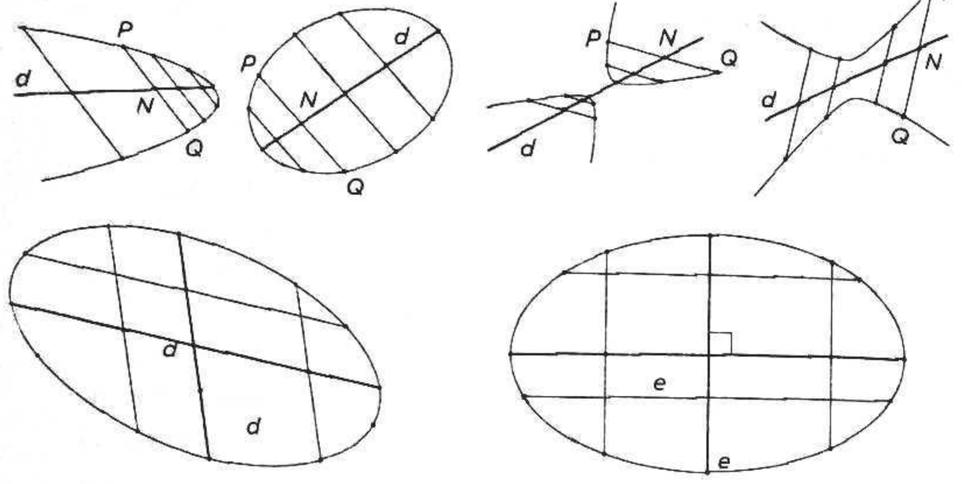
En la definición 6, que complementa a las anteriores, Apolonio señaló que daba el nombre de «diámetros conjugados» de una y de dos líneas curvas «a las rectas cada una de las cuales es un diámetro que divide en dos partes iguales a las paralelas al otro». Asimismo, en la definición 7, que también precisa una nota aclaratoria, estableció lo siguiente:

> Llamo «eje» de una y de dos curvas al diámetro de esta o de estas curvas que corta a las paralelas [es decir, al diámetro conjugado a este eje] en ángulo recto.

Por último, en la definición 8 dejó constancia de que llamaba «ejes conjugados» de una y de dos curvas a los diámetros conjugados que cortan mutuamente en ángulos rectos a sus paralelas.

La figura 1 contribuye a visualizar algunos de los conceptos que se han tratado en estas definiciones.

FIG. 1




*d*: Diámetros conjugados

*e*: Ejes

## LAS TRES PRIMERAS PROPOSICIONES

Las tres primeras proposiciones del Libro I de *Las cónicas*, que consideran la sección del cono por un plano que pasa por su eje, son relativas al triángulo axial principal del cono. Las dos siguientes proposiciones demuestran que en un cono oblicuo de base circular, toda sección paralela a la base es un círculo. Las proposiciones que siguen muestran curvas engendradas de esta forma:

a) Por el plano secante que corta todas las generatrices sobre una misma superficie del cono.
b) Por el plano secante paralelo a una de las generatrices.
c) Por el plano secante que corta las dos superficies del cono.

Estas proposiciones aportaron la importante noción de «parámetro», que Apolonio denominó «lado recto» y que los geómetras renacentistas designaron largo tiempo como *latus rectum*. También aportaron, a continuación, las nociones de la abscisa y de la ordenada y demostraron «la constancia de la razón del cuadrado de la ordenada a la abscisa» para la curva engendrada por el plano secante paralelo a una de las generatrices del cono.

Como ya se ha dicho, tanto los matemáticos de la Academia platónica como Aristeo, Euclides y Arquímedes habían considerado las tres secciones cónicas, de forma exclusiva, como secciones planas, perpendiculares a una generatriz, de los conos rectos acutángulo, rectángulo y obtusángulo. Por este motivo, en las obras de Arquímedes, la parábola fue designada todavía por la expresión «sección de cono recto rectángulo»; la hipérbola, por la de «sección de cono recto obtusángulo», y la elipse, por la de «sección de cono recto acutángulo». Fue Apolonio quien presentó por primera vez las tres secciones cónicas obtenidas por secciones planas de un mismo cono cualquiera, recto u oblicuo, de base circular.

La prioridad absoluta de esta concepción general de obtener las tres secciones cónicas es atribuida al geómetra Gémino de Rodas, un matemático y astrónomo del siglo I a.C. del que se sabe que citó dicha isla griega en alguno de sus trabajos, y a Eutocio de Ascalon, aunque es muy posible que en algún caso particular tanto Euclides como Arquímedes hubieran obtenido alguna de las secciones cónicas en la forma de Apolonio.

Lo que sí parece indiscutible es que se debe a Apolonio las denominaciones de parábola, hipérbola y elipse que sustituyeron a las farragosas circunlocuciones mencionadas. Si bien estas correspondían de forma fiel y racional a la forma de generación de las tres secciones cónicas, Apolonio debió tener en cuenta cómo su reiteración enredaba sobremanera el texto de las demostraciones de Arquímedes. De modo muy juicioso, creó la nueva nomenclatura que relacionó, de forma filológica, las propias características semánticas de los términos con las propiedades de cada una de las tres curvas, propiedades que pondrán en evidencia sus ecuaciones cartesianas.

A este respecto son muy ilustrativas las consideraciones que hizo el historiador estadounidense Carl Benjamin Boyer (1906-

### ARQUÍMEDES, UN GENIO POLIFACÉTICO Y UNIVERSAL

*Arquimedes pensativo*, de Domenico Fetti (m. 1623).

Arquímedes, considerado el matemático más importante de la Antigüedad, tenía la capacidad de sintetizar dos naturalezas distintas para lograr la mejor vía en la búsqueda del conocimiento. Esta virtud le permitió, por ejemplo, atemperar la poderosa imaginación trascendental de Platón con el proceder meticuloso y correcto de Euclides. Distinguido a lo largo de la historia de la cultura, la ciencia y la tecnología como uno de los sabios más eminentes, fue el artífice de múltiples ingenios construidos a partir de su portentosa imaginación, por lo que se le reconoce como el primer ingeniero de la Antigüedad. Además, dadas sus contribuciones a la estática y la hidrostática, se le considera también el fundador de estas ciencias y, en consecuencia, el padre lejano de las disciplinas que después de veinte siglos adoptarían el nombre de filosofía natural y, más tarde, física matemática. En el terreno estricto de las matemáticas, Arquímedes pasa como el más original, riguroso y fecundo de los geómetras griegos, ya que magnificó de forma colosal el patrimonio geométrico euclídeo y conjugó a la perfección la intuición en el descubrimiento y el virtuosismo en la demostración. Se sitúa a Arquímedes en los orígenes históricos del cálculo integral, donde su punto de partida fue la conjunción de dos métodos: uno, heurístico y empírico, y el otro, riguroso y apodíctico. Así, su «método mecánico» de investigación apuntó hacia los indivisibles y los infinitesimales de las cuadraturas del siglo XVII, que condujeron al cálculo de Newton y Leibniz, y su «método demostrativo de exhaución» apuntó hacia la aritmética de los límites, que fundamenta el análisis moderno en el siglo XIX.

**«De todos los grandes hombres de la Antigüedad»**

Parafraseando la célebre frase atribuida a Newton, se puede rendir homenaje a Arquímedes definiéndolo como un extraordinario titán sobre cuyos hombros se auparon los gigantes matemáticos del siglo XVII para forjar uno de los instrumentos científicos más potentes de toda la historia del pensamiento matemático: el cálculo integral. Por todo ello, no es de extrañar que el enciclopedista francés D'Alembert (1717-1783), en su *Discurso preliminar de la Enciclopedia*, elogiase al genio de Siracusa con esta máxima: «De todos los grandes hombres de la Antigüedad, es acaso Arquímedes el que más merece figurar al lado de Homero».



1976), especializado en la historia de la ciencia, en su famosa obra *Historia de la Matemática*:

> No hay duda de que lo largo de la historia de la matemática los conceptos han sido mucho más importantes que la terminología utilizada, pero no obstante el cambio de nombre de las secciones cónicas debido a Apolonio tiene una importancia mayor que la usual. Durante un siglo y medio aproximadamente estas curvas no tuvieron otro nombre específico más que descripciones triviales de la manera como habían sido descubiertas... Pero fue realmente Apolonio, posiblemente siguiendo una sugerencia de Arquímedes, quien introdujo por primera vez los nombres de elipse y de hipérbola en conexión con estas curvas.

Boyer recalcó que las palabras «elipse», «parábola» e «hipérbola» no habían sido acuñadas para la ocasión, sino «adaptadas a partir de un uso anterior, debido quizás a los pitagóricos, en la solución de ecuaciones cuadráticas por el método de aplicación de áreas». El historiador también precisó que la voz *ellipsis* significa una «deficiencia» y delimitó su uso a un contexto muy concreto: «cuando un rectángulo dado debía aplicarse a un segmento dado y resultaba escaso en un cuadrado o en una figura [u otra figura dada]». De la palabra *hyperbola* —«avanzar más allá»— comentó que se había adoptado para el caso «en que el área excedía del segmento dado»; y de la palabra *parabola* —«colocar al lado» o «comparar»—, señaló que «indicaba que no había ni deficiencia ni exceso».

> «El nivel más avanzado de las secciones cónicas en *Las cónicas*, de Apolonio, desplazó a todos sus rivales en este campo.»
>
> — CARL B. BOYER.

De las proposiciones de Apolonio surgió la conocida ecuación moderna de la parábola con vértice en el origen y con eje en el eje de abscisas, que es la siguiente:

$$y^2 = lx,$$

donde «l» es el llamado *latus rectum* o parámetro, que suele representarse por 2p y en ocasiones por 4p.

Es decir, la parábola tiene la propiedad característica de que para todo punto tomado sobre la curva, el cuadrado construido sobre su ordenada $y$ es exactamente igual al rectángulo construido sobre la abscisa $x$ y el parámetro «l». Por su parte, las ecuaciones de la elipse y de la hipérbola, referidas de forma análoga a uno de sus vértices como origen, son:

$$\frac{(x \pm a)^2}{a^2} \pm \frac{y^2}{a^2} = 1 \quad \text{o bien} \quad y^2 = lx \pm \frac{b^2 x^2}{a^2}.$$

donde «l» es de nuevo el *latus rectum* o parámetro $2b^2/a$. Es decir, en el caso de la elipse:

$$y^2 < lx,$$

mientras que para la hipérbola,

$$y^2 > lx,$$

Como puede apreciarse en todo lo que se ha explicado, Apolonio de Perga pulió de forma considerable el estudio de las cónicas. De hecho, le aportó una simplificación y sistematización que resultó decisiva para desterrar los enredos que se habían dado hasta la fecha. Y no solo eso: también facilitó un empleo más racional de estos recursos geométricos y, con ello, abrió la puerta a los perfeccionamientos y las aplicaciones prácticas que llegarían muchos siglos después.

*Las cónicas*, además de su mérito totalizador, contienen un material sumamente original e ingenioso, excelentemente organizado. Sin duda, se trata de una construcción geométrica monumental, una obra que supuso la culminación de la geometría griega y dejó el tema prácticamente cerrado para el pensamiento matemático posterior.

## LAS PROPOSICIONES MÁS IMPORTANTES

Las proposiciones más importantes de todo el Libro I son las denominadas I.11, I.12 y I.13. Su lectura resulta dificultosa, a causa de la gran extensión que se les concede y la complejidad que encierran, ya que se describen las propiedades fundamentales de la parábola, la elipse y la hipérbola, que Apolonio hizo derivar de la consideración estereotómica de las curvas.

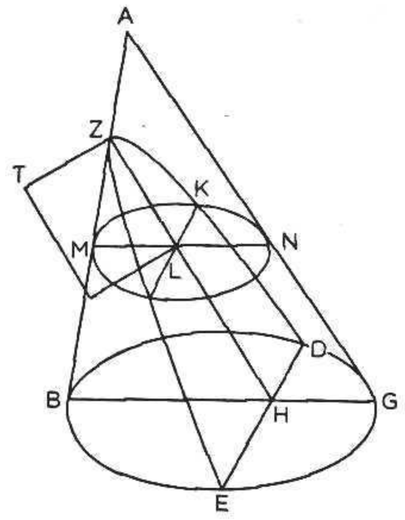
La primera de estas proposiciones, el teorema de la parábola, ya ofrece de entrada ciertas dificultades de interpretación y comprensión lectora, que se incrementan aún más con el teorema de la hipérbola y alcanzan su grado más difícil en el teorema de la elipse. No obstante, lo esencial es leer atentamente las explicaciones que se adjuntan a continuación de la exposición literal de cada una de ellas, sin detenerse demasiado en el lenguaje del sabio alejandrino. En cualquier caso, estas consideraciones no desmerecen un ápice los fenomenales hallazgos de Apolonio de Perga, sino que procuran contextualizar el lenguaje de su tiempo para poder armonizarlo y simplificarlo con el que se utiliza hoy en día en matemáticas.

## EL TEOREMA DE LA PARÁBOLA

Este teorema corresponde a la proposición I.11, que en palabras de Apolonio ofrece el siguiente enunciado y cuya resolución queda plasmada en la figura 2:

> Si se corta un cono por un plano que pase por el eje y por otro que corte a la base según una perpendicular a la del triángulo según el eje, si el diámetro de la sección es paralelo a uno de los lados del triángulo, el cuadrado de toda recta trazada desde la sección del cono paralelamente a la intersección del plano secante y el de la base del cono hasta el diámetro de la sección —es decir, el cuadrado de la ordenada de un punto de la sección—, equivale al rectángulo formado por la recta que separa en el diámetro del lado del vértice de la sección y por una cierta recta cuya razón a la situada entre el ángulo cónico y el vértice de la sección es la misma que la del cuadrado de la base del triángulo según el eje al rectángulo formado por los otros dos lados del triángulo. Llamaremos parábola a tal sección.

FIG. 2




No menos dificultades brinda su continuación, cuya lectura puede dejar prácticamente sin aliento:

> Sea un cono de vértice A y base el círculo BG, y cortémosle por un plano que pase por el eje, el cual producirá como sección el triángulo ABG, y por otro plano que corte a la base del cono según la recta DE perpendicular a la base BG del triángulo ABG y a la superficie cónica según la línea DZE cuyo diámetro ZH es paralelo al lado AG del triángulo que pasa por el eje; levantemos en el punto Z la perpendicular ZT a ZH y hagamos de manera que la recta ZT sea a una recta ZA como el cuadrado de BG al rectángulo formado por AB y AG y, por último, tracemos por un punto cualquiera K de la sección la paralela KL a DE. Digo que el cuadrado de KL equivale al rectángulo de ZT y ZL.

Tanto el enunciado como la demostración de Apolonio, como puede comprobarse, son bastante abstrusos. Afortunadamente, el álgebra literal puede ayudar a su exégesis. De esta manera, en el círculo de diámetro MN se tiene:

$$KL^2 = LM \cdot LN,$$



y por construcción es:

$$\frac{ZT}{ZA} = \frac{BG^2}{AB \cdot AG} = \frac{BG}{AB} \cdot \frac{BG}{AG},$$

de los triángulos semejantes (AMN, ABG, ZML), resulta:

$$\frac{BG}{AB} = \frac{MN}{AM} = \frac{ML}{ZM} = \frac{LN}{AZ}, \quad \frac{BG}{AG} = \frac{MN}{NA} = \frac{ML}{LZ}.$$

A partir de lo anterior, la segunda igualdad se convierte en:

$$\frac{ZT}{ZA} = \frac{LN}{AZ} \cdot \frac{ML}{LZ} = \frac{KL^2}{AZ \cdot LZ},$$

de donde resulta:

$$KL^2 = ZT \cdot ZL,$$

y a la recta ZT se le llama la recta según la cual están en potencia las rectas trazadas de forma ordenada sobre el diámetro ZH, recta llamada el *latus rectum*.

Es decir, se trata de la recta según la cual se aplica un área rectangular equivalente a la potencia —un cuadrado— de las rectas trazadas de forma ordenada sobre el diámetro. Apolonio y sus predecesores, sobre todo Arquímedes, designaron siempre con esta expresión a la recta que es la altura constante de un rectángulo que tiene como base la abscisa de un punto de la cónica y cuya área en la parábola —o el área aumentada de otra área determinada en la hipérbola, o el área disminuida de otra área determinada en la elipse—, equivale al cuadrado de la ordenada. Esta recta característica se llama ahora «parámetro» y se pone en evidencia por las ecuaciones cartesianas de la parábola:

$$y^2 = 2px,$$

de la hipérbola:

$$y^2 = px + \frac{p}{a}y^2,$$

y de la elipse:

$$y^2 = px - \frac{p}{a}y^2,$$

## EL TEOREMA DE LA HIPÉRBOLA

El teorema de la hipérbola corresponde a la proposición I.12, cuya resolución se muestra en la figura 3 y que el «gran geómetra» desarrolló de esta manera:

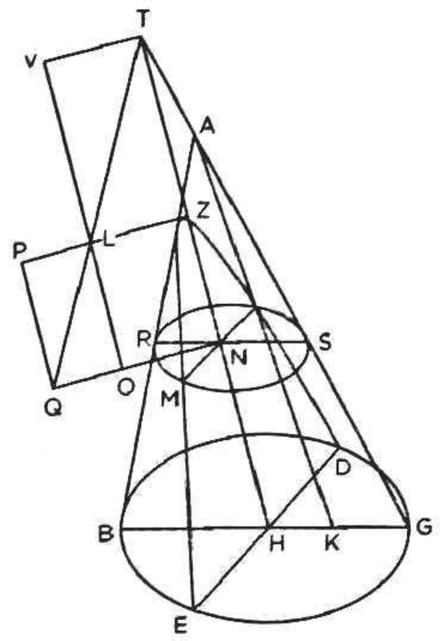
> Si se corta un cono por un plano que pase por el eje y por otro que corte a la base según una perpendicular a la del triángulo según el eje, si el diámetro de la sección encuentra a uno de los lados del triángulo más allá del vértice del cono, el cuadrado de toda recta trazada desde la sección del cono paralelamente a la intersección del plano secante y el de la base del cono hasta el diámetro de la sección, equivale a un área aplicada según una cierta recta cuya razón a la situada en la prolongación del diámetro de la sección, que subtiende el ángulo externo del triángulo, es la misma que la del cuadrado de la paralela desde el vértice del cono al diámetro de la sección hasta la base del triángulo, el rectángulo formado por los segmentos que la recta determina en la base, cuya altura es la parte del diámetro [«la abscisa»] separada por la primera recta [«la ordenada»] del lado del vértice de la sección, aumentado en una figura semejante y semejantemente dispuesta, al rectángulo limitado por la recta que subtiende el ángulo externo del triángulo y el parámetro. A tal sección le llamaremos hipérbola.

El enunciado de esta proposición se complica más aún en su continuación, que resulta larga, compleja y repleta de acotaciones:

> Sea un cono de vértice A y base el círculo BG, y cortémoslo por un plano que pase por el eje, el cual produce como sección el triángulo ABG y por otro plano que corte a la base del cono según una recta DE perpendicular a la BG del triángulo y a la superficie cónica según la línea DZE cuyo diámetro ZH, prolongado, encuentra a uno de los



FIG 3




> lados AC del triángulo ABG en un punto T más allá del vértice; tracemos por A una recta AK paralela al diámetro ZH de la sección; levantemos en el punto Z la perpendicular ZL a ZH y hagamos de manera que la recta ZT sea a una recta ZL como el cuadrado de KA al rectángulo formado por KB y KG, y, por último, tracemos por un punto cualquiera M de la sección paralela MN a DE y por el N la NOQ paralela a ZL, prolonguemos la TL hasta su encuentro en Q con la NOQ y por los puntos L y Q las LO y QP paralelas a la ZN. Digo que el cuadrado de MN es equivalente al rectángulo ZQ que, aplicado a la recta ZL, tiene el ancho ZN y el exceso LQ, que es un rectángulo semejante al de las rectas ZT y ZL.

Apolonio vino a decir que en la sección cónica considerada, el cuadrado de la ordenada equivale a un área rectangular que, aplicado siguiendo el parámetro, es decir, teniendo el parámetro como altura, y teniendo la abscisa como base, es aumentada de otra área, semejante a la que tiene el eje transverso o diámetro como base y el parámetro como altura. De esta forma, al designar la ordenada por «y», la abscisa por «x», el eje transverso o diáme-

tro por «a» y el parámetro por «p», el enunciado de la proposición se puede traducir por la relación:

$$y^2 = px + \frac{p}{a}y^2,$$

que es la ecuación cartesiana de la hipérbola, referida a ejes oblicuos, siendo uno de ellos el diámetro y el otro, la tangente en el extremo. Aunque la demostración de esta proposición es muy trabajosa, el álgebra atempera la fatiga de la retórica clásica griega. Así, como se aprecia en la figura 3, en el círculo de diámetro RS se tiene:

$$MN^2 = NR \cdot NS,$$

y por construcción es:

$$\frac{ZT}{ZL} = \frac{KA^2}{KB \cdot KG} = \frac{KA}{KB} \cdot \frac{KA}{KG},$$

de los triángulos semejantes —AKB, HZB, NZR, y AKG, HTG, NTS, respectivamente—, resulta:

$$\frac{KA}{KB} = \frac{HZ}{HB} = \frac{NZ}{NR}, \quad \frac{KA}{KG} = \frac{HT}{HG} = \frac{NT}{NS}.$$

A partir de lo anterior, la segunda igualdad se convierte en:

$$\frac{ZT}{ZL} = \frac{NZ}{NR} \cdot \frac{NT}{NS} = \frac{NZ \cdot NT}{MN^2},$$

de donde resulta

$$MN^2 = \frac{ZL \cdot NT}{ZT} \cdot NZ,$$

y como

$$\frac{ZT}{ZL} = \frac{NT}{NQ}; \quad NQ = \frac{ZL \cdot NT}{ZT},$$

se concluye que

$$MN^2 = NQ \cdot NZ.$$



Tal como se quería demostrar NQ · NZ es el área del rectángulo PZNQ igual al LZNO, es decir, al aplicado a ZL con la altura ZN, aumentado en el rectángulo PLOQ semejante al VTZL y semejantemente dispuesto, cuyos lados son la recta ZL, a la que Apolonio llamó «parámetro», y la ZT opuesta al ángulo ZAT externo del triángulo según el eje.

## EL TEOREMA DE LA ELIPSE

Por su parte, el teorema de la elipse corresponde a la proposición I.13, donde Apolonio no escatimó palabras para describirlo con la precisión que creyó aconsejable:

> Si se corta un cono por un plano que pase por el eje y por otro no paralelo ni en sentido contrario, que corte a los lados del triángulo que pasa por el eje, si la intersección del plano secante con el de la base es perpendicular a la del triángulo o a su prolongación, el cuadrado de toda recta trazada desde la sección del cono paralelamente a dicha intersección hasta el diámetro de la sección, equivale a un área aplicada según una cierta recta, cuya razón al diámetro es la misma que la del cuadrado de la paralela al diámetro desde el vértice del cono hasta la base del triángulo, al rectángulo formado por las rectas que esta última determina en los lados del triángulo, cuya altura es la parte del diámetro separada por la primera recta, del lado del vértice de la sección, disminuido en una figura semejante y semejantemente dispuesta, al rectángulo limitado por el diámetro y el parámetro. Llamaremos elipse a tal sección.

El desarrollo subsiguiente continúa siendo tan exhaustivo o más que en los casos de la parábola y la hipérbola.

Sea un cono de vértice A y base el círculo BG y cortémosle por un plano que pase por el eje, el cual produce como sección el triángulo ABG, y por otro plano no paralelo ni en sentido contrario, cuya intersección con la superficie cónica sea la línea DEL de diámetro

DE y ZH perpendicular a BG la del plano secante y el de la base del cono; tracemos por el punto E la ET perpendicular a ED, por A la AK paralela a ED y hagamos de manera que la recta ED sea a una recta ET como el cuadrado de KA al rectángulo formado por KB y KG, y, por último, tracemos por un punto cualquiera L de la sección la paralela LM a ZH. Digo que el cuadrado de LM equivale al rectángulo que, aplicado a ET, tiene el ancho EM disminuido en una figura semejante al rectángulo de las rectas ED y ET.

Esta proposición, que se resuelve en la figura 4, completa la generación de Apolonio de las tres secciones cónicas, cuyas propiedades dedujo bajo su consideración estereotómica. Su enunciado es tan complicado como el de la anterior, y viene a decir que en la sección cónica considerada, el cuadrado de la ordenada equivale a un área rectangular que, aplicada siguiendo el parámetro, es decir, teniendo este parámetro como longitud, y teniendo la abscisa como anchura, es disminuida de otra área, semejante a la que tiene por longitud el parámetro y como anchura el diámetro. De este modo, al designar la ordenada por «y», la abscisa por «x», el eje transverso o diámetro por «a» y el parámetro por «p», el enunciado de la proposición se puede traducir por la relación:

$$y^2 = px - \frac{p}{a}y^2,$$

que es la ecuación cartesiana de la elipse, referida a ejes oblicuos, siendo uno de ellos el diámetro y el otro, la tangente en el extremo. Como en los casos anteriores, el álgebra simbólica viene en auxilio para la demostración actual del resultado de Apolonio. En el círculo de diámetro PR se tiene:

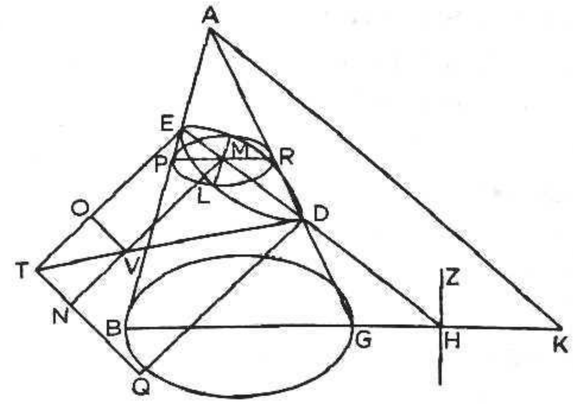
$$LM^2 = MP \cdot MR,$$

y por construcción es:

$$\frac{ED}{ET} = \frac{KA^2}{KB \cdot KG} = \frac{KA}{KB} \cdot \frac{KA}{KG},$$



FIG. 4




de los triángulos semejantes —ABK, EBH, EMP y AGK, AGH y DRM, respectivamente—, resulta:

$$\frac{KA}{KB} = \frac{HE}{HB} = \frac{ME}{MP}, \quad \frac{KA}{KG} = \frac{HD}{HG} = \frac{MD}{MR}.$$

Al seguir un argumento similar al utilizado con el teorema de la hipérbola, mostrado anteriormente, se comprueba que, a partir de lo anterior, la segunda igualdad se convierte en:

$$\frac{ED}{ET} = \frac{ME}{MP} \cdot \frac{MD}{MR} = \frac{ME \cdot MD}{LM^2},$$

de donde resulta que

$$LM^2 = \frac{ET \cdot MD}{ED} \cdot ME,$$

y como

$$\frac{ED}{ET} = \frac{MD}{MV}; \; MV = \frac{ET \cdot MD}{ED},$$

se obtiene finalmente que

$$LM^2 = MV \cdot ME.$$

Como se quería demostrar, MV · ME es el área del rectángulo OEMV igual al TEMN, es decir, al aplicado a ET con la altura EM, disminuido en el rectángulo TOVN semejante al TEDQ y semejantemente dispuesto, cuyos lados son la recta ET, a la que Apolonio llama «parámetro», y el diámetro ED de la sección.

## LAS DOS RAMAS DE LA HIPÉRBOLA

Una de las cuestiones más importantes de *Las cónicas* es la consideración del cono con dos hojas, que identifica las dos ramas de la hipérbola, lo que corresponde a la proposición I.14, planteada de nuevo con enorme aparato descriptivo.

> Si se cortan las dos superficies cónicas opuestas por el vértice por un plano que no pase por el eje se tendrá en cada superficie una sección llamada hipérbola; el diámetro de ambas secciones será el mismo; los parámetros de las rectas trazadas ordenadamente al diámetro y paralelas a la situada en la base del cono [es decir, paralelamente a la recta determinada en la base del cono por el plano secante] serán iguales y el eje transverso [el lado transverso, es decir, el eje transverso de la hipérbola de doble rama] de la figura será la recta que une los vértices de las dos secciones, las cuales se llaman opuestas.

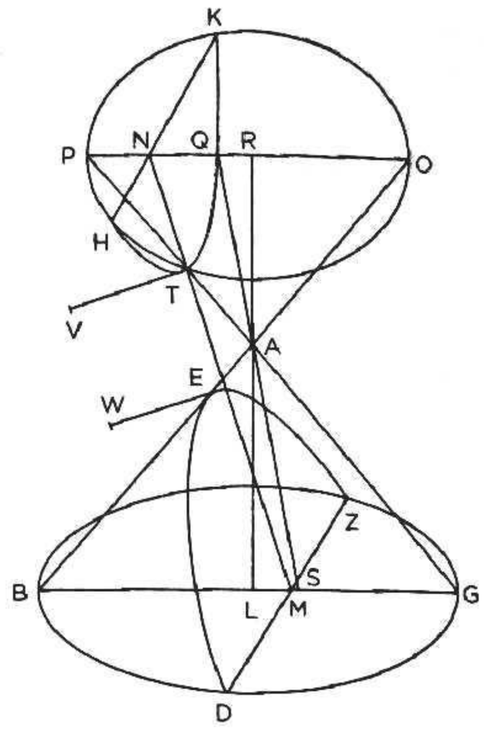
Acto seguido, el «gran geómetra» concluyó:

> Cortemos las superficies opuestas por el vértice A por un plano que no pase por el eje y cuyas secciones con aquellas sean DEZ y HTK. Digo que estas secciones son hipérbolas.

La demostración le exigió un desarrollo muy largo y exhaustivo hasta plasmar su solución, que se muestra en la figura 5. Apolonio llamó «opuestas» a las dos ramas de la hipérbola. A partir de esta proposición 14, se consideraron como una sola curva producida por un plano que corta a las dos hojas de un cono.



FIG. 5



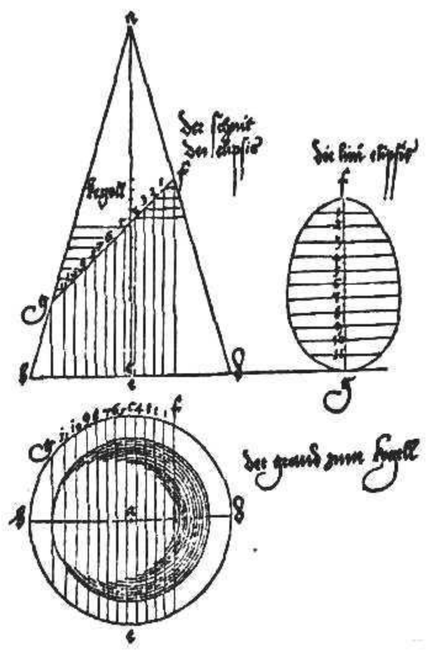

## DEMOSTRACIÓN MEDIANTE UN ÚNICO CONO OBLICUO

Es interesante la consideración de los tres resultados de las proposiciones I.11, I.12 y I.13, que versan respectivamente sobre la parábola, la hipérbola y la elipse, mediante una única figura de un cono oblicuo. De esta manera, queda bien claro que construidas las tres curvas, Apolonio demostró que:

- En la parábola, el cuadrado de la ordenada es igual al rectángulo cuyos lados son el parámetro y la abscisa.
- En la hipérbola, el cuadrado de la ordenada es mayor que el rectángulo cuyos lados son el parámetro y la abscisa.
- En la elipse, el cuadrado de la ordenada es menor que el rectángulo cuyos lados son el parámetro y la abscisa.

## ALBERTO DURERO ILUSTRA LAS CÓNICAS DE APOLONIO

El pintor y grabador alemán Alberto Durero (1471-1528), máximo exponente del arte renacentista en Alemania, no se resistió a incluir sendos grabados sobre las tres cónicas de Apolonio en su tratado *Instrucción sobre la medida con regla y compás de figuras planas y sólidas*, compuesto de cuatro libros y más conocido de forma abreviada como *De la medida* (1525). Ante la dificultad que le ofreció el análisis y representación de las secciones cónicas, recurrió a lo que posteriormente se denominaría «proyección ortográfica»: una transformación perspectiva del círculo empleando un «plano del cuadro» inclinado; de ahí la compresión extrema de los intervalos próximos a los vértices, y que sus elipses tuvieran más bien forma ovoide. Con estos grabados, Durero no solo plasmó y divulgó los trabajos de Apolonio, sino que también contribuyó a afianzar las tres definiciones clásicas sobre las cónicas: primera, que las parábolas son las curvas que se forman al cortar un cono con un plano paralelo a una de las aristas; segunda, que las hipérbolas son las curvas que se forman al cortar un cono con un plano que toca los dos mantos del cono, y tercera, que las elipses son las curvas que se forman cortando un cono con un plano que solo toca uno de los mantos del cono y no es paralelo a ninguna de sus aristas.

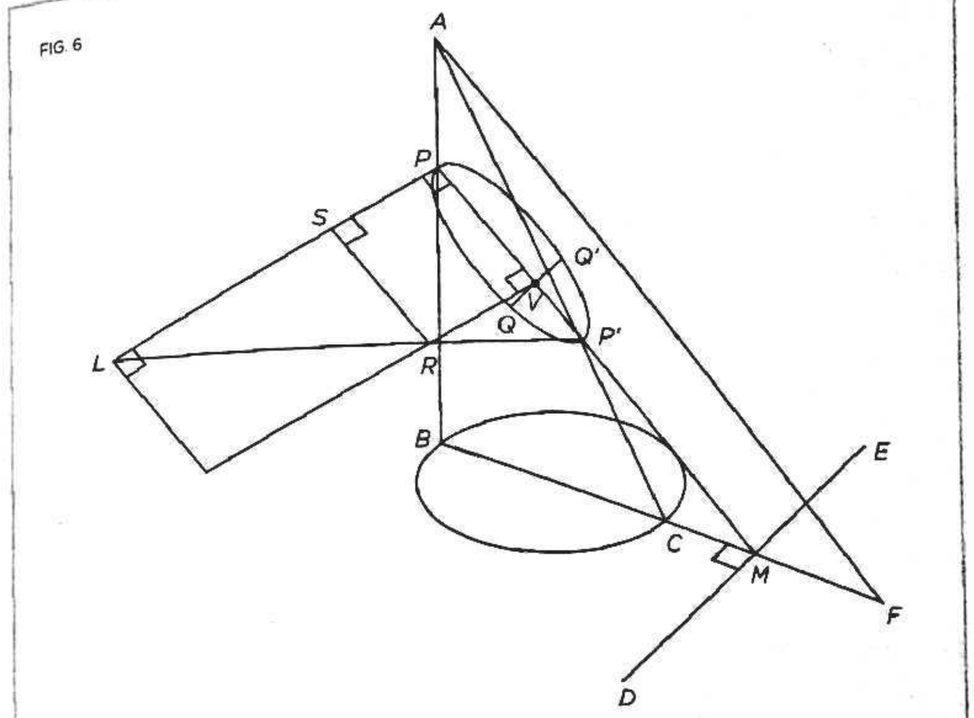


A la izquierda, *Autorretrato*, de Durero (1500). A la derecha, grabado sobre las elipses descritas por Apolonio, que Durero incluyó en *De la medida* (1525).



Efectivamente, estas propiedades son ciertas. Aquí se verifican en notación matemática moderna y con el apoyo de la figura 6:

FIG. 6




Dado el círculo BC y un punto A fuera del plano determinado por el círculo, sea el doble cono engendrado por una recta que pasa por A y se mueve sobre la circunferencia. Al círculo BC se le llama la base del cono, mientras que se llama eje del cono a la recta que une el punto A con el centro del círculo BC.

Sea la sección del cono por un plano que corte al plano de la base en una recta DE.

Sea BC el diámetro del círculo base que es perpendicular a DE.

ABC es un triángulo que contiene al eje del cono —se llama «triángulo axial»—. Cuando este triángulo corta a la cónica en PP', entonces PP'M es la recta determinada por la intersección del plano generador de la sección con el triángulo axial.

Si QQ' es cualquier cuerda de la sección cónica paralela a la recta DE, Apolonio demuestra que PP' corta a QQ' en su punto medio, de forma que VQ es la mitad de QQ'.

Sea ahora la recta AF paralela a PM, que corta a BM en F. Y sea la recta PL perpendicular a PM en el plano generador de la sección.

Para la elipse y la hipérbola se toma L, de forma que se cumpla la condición:

$$\frac{PL}{PP'} = \frac{BF \cdot FC}{AF^2},$$

mientras que, para la parábola, la condición sea:

$$\frac{PL}{PA} = \frac{BC^2}{BA \cdot AC}.$$

Para los casos de la elipse y de la hipérbola, sean los segmentos P'L y VR paralelo a PL desde V hasta cortar a P'L en R, mientras que en el caso de la hipérbola P' está en la otra rama y hay que extender P'L para obtener el punto R.

Apolonio demostró que en el caso de la elipse y de la hipérbola se tiene:

$$QV^2 = PV \cdot PR.$$

Al segmento QV, Apolonio lo llamó «ordenada», de modo que el resultado muestra que el cuadrado de la ordenada QV es equivalente a un rectángulo construido sobre PL, exactamente el que tiene como lados los segmentos PV, PR. Además, Apolonio probó que en el caso de la elipse, el complementario de ese rectángulo en el rectángulo total determinado por los segmentos PV y PL, es el rectángulo que tiene por diagonal a LR. Es decir, el determinado por los segmentos LS y SR, que es semejante al rectángulo de lados PL y PP', de donde resulta el término «elipse».

En el caso de la hipérbola se sigue cumpliendo la expresión anterior, pero la construcción establecería que VR es más largo que PL, de modo que el rectángulo determinado por los segmentos PV y VR excede al rectángulo construido sobre PL, es decir, el rectángulo determinado por los segmentos PL y PV en un rectángulo que tiene por diagonal a LR que es semejante al rectángulo de lados PL y PP', de donde resulta el término «hipérbola».



En el caso de la parábola, Apolonio demostró que, en lugar de la expresión anterior, se tiene la siguiente:

$$QV^2 = PV \cdot PL,$$

de modo que el rectángulo que equivale a $QV^2$ es justamente el construido sobre PL y de anchura PV, de donde resulta el término «parábola». Así, las ecuaciones:

$$QV^2 = PV \cdot PR\ ,\ QV^2 = PV \cdot PL$$

son las propiedades básicas de las secciones cónicas, a partir de las cuales Apolonio dedujo el resto. Estas expresiones cumplen la misma función que las ecuaciones de las cónicas en los cálculos modernos, al igual que la función de la abscisa y la ordenada actuales sustituyen al segmento PV y la semicuerda QV. Para transcribir las propiedades básicas de las secciones cónicas de Apolonio a la geometría actual de coordenadas es útil emplear notaciones:

— Se denota por 2p el segmento PL, llamado por Apolonio «parámetro» de las ordenadas, conocido habitualmente como *latus rectum* en las ediciones latinas.
— Por d, la longitud del segmento PP' llamado «diámetro».
— Por $x$, la distancia PV medida a partir de P.
— Por $y$, la distancia QV.

Entonces, si se toman las coordenadas oblicuas señaladas, resulta que, en el caso de la parábola, la última expresión

$$QV^2 = PV \cdot PL$$

se escribe ahora como

$$y^2 = 2px.$$

Para la elipse, de la penúltima ecuación

$$QV^2 = PV \cdot PR,$$

se obtiene, en primer lugar, que

$$y^2 = PV \cdot PR.$$

Ahora bien, dado que $PV \cdot VR = x(2p - LS)$ y el rectángulo determinado por LS y SR es semejante al rectángulo determinado PL y PP', se verifica que:

$$\frac{LS}{PL} = \frac{x}{d}.$$

Por tanto,

$$LS = \frac{2px}{d},$$

de donde resulta que

$$y^2 = x\left(2p - \frac{2px}{d}\right).$$

Es decir, se obtiene la ecuación de la elipse:

$$y^2 = 2px - \frac{2px^2}{d}.$$

De forma análoga, para la hipérbola, se obtiene:

$$y^2 = 2px + \frac{2px^2}{d}.$$

En los desarrollos de Apolonio se podría considerar que para la parábola el diámetro sería infinito, de forma que, en cierto modo, esta curva se podría tener como una «versión geométrica límite» de la elipse o la parábola. Se ha visto, pues, a partir de los desarrollos de Apolonio, que las secciones cónicas se pueden considerar como curvas de segundo grado, vinculadas a las construcciones griegas que se destinaron a resolver la ecuación cuadrática; estas remataron el «álgebra geométrica» de la matemática griega, que quedó plasmada en los *Elementos* de Euclides y dotó a la ciencia helénica la misma función que la geometría cartesiana a la ciencia moderna.

La colosal parafernalia de procedimientos subsidiarios que, de forma magistral, Apolonio aplicó y aportó a cada caso particular, sería sustituida siglos después por los métodos uniformes y sistemáticos introducidos por Descartes —y también por Fer-



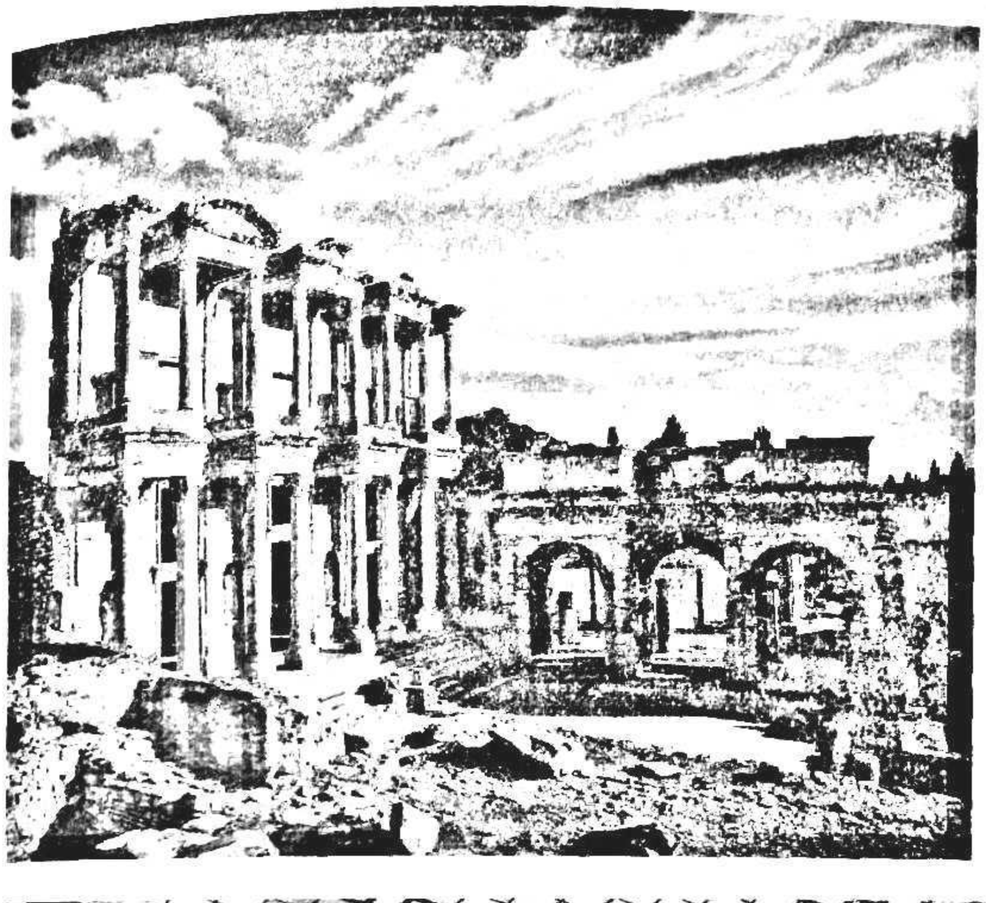
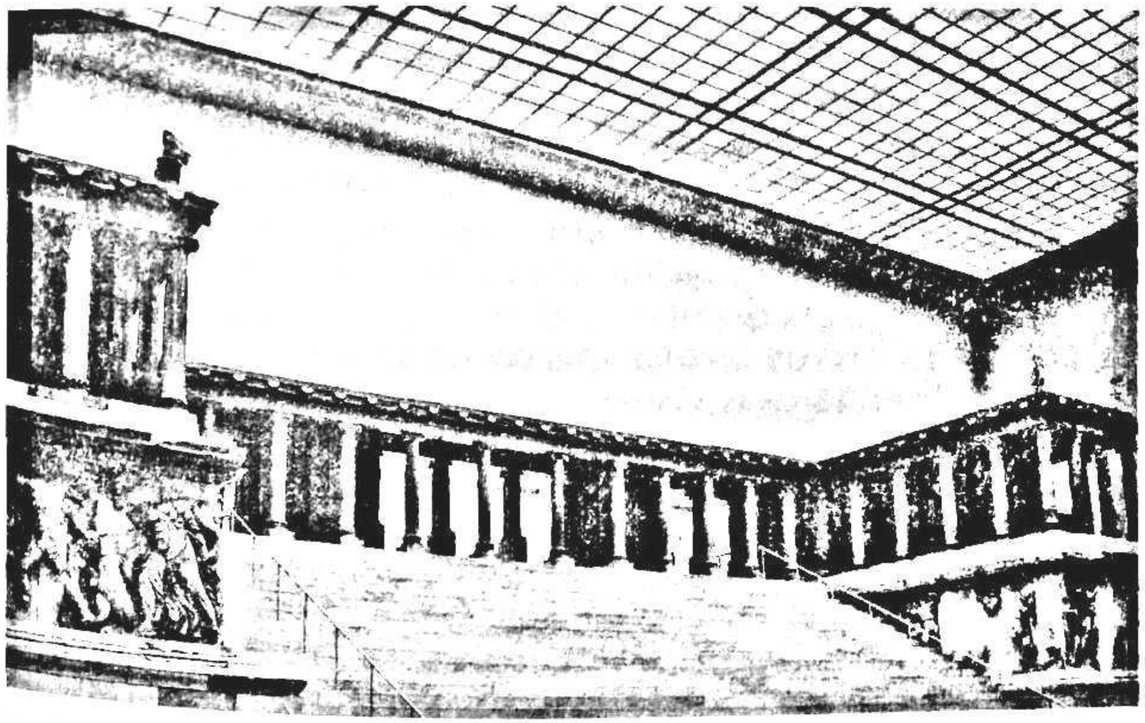


FOTO SUPERIOR: Fachada de la magnífica Biblioteca de Celso, en Éfeso, ciudad en la que se estima que Apolonio realizó parte de sus trabajos geométricos.

FOTO INFERIOR: El Altar de Pérgamo, en Berlín, procede de las ruinas de esta polis griega en la actual Turquía. La historiografía también apunta a que Apolonio desarrolló allí buena parte de su obra.



mat—. Estos son universalmente aplicables a todo tipo de problema geométrico, una vez establecidas las coordenadas cartesianas sobre un sistema fijo de ejes.

Como puede apreciarse, las relaciones de áreas de Apolonio, que expresan propiedades intrínsecas de la curva, se prestan con suma facilidad a ser traducidas en el ulterior lenguaje del álgebra simbólica de ecuaciones. Resulta importante destacar que esta cualidad permitiría la asociación de curvas y ecuaciones, que es la principal finalidad programática de la futura geometría analítica.

A la vista de las expresiones obtenidas para las cónicas, trasunto de la propiedad fundamental que satisfacen como lugares planos, se observa que, en el caso de la elipse:

$$y^2 < lx,$$

mientras que para la hipérbola:

$$y^2 > lx.$$

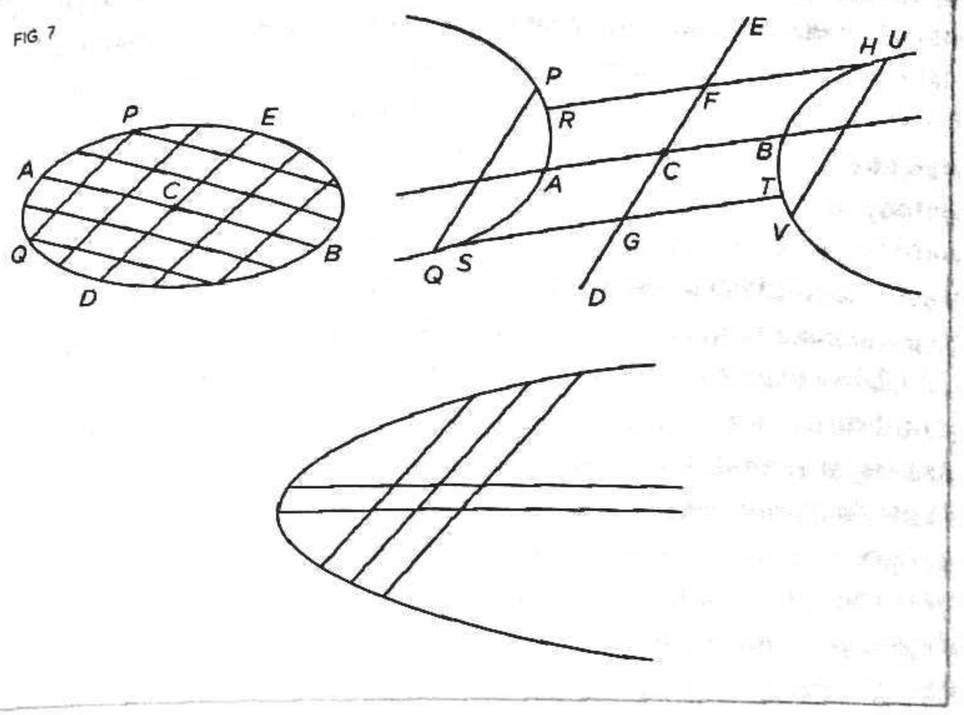
Las propiedades de las curvas que expresan estas desigualdades son las que sugirieron, como se mencionó, los nombres de las cónicas con base en el lenguaje griego ordinario: parábola, elipse e hipérbola. Así fueron bautizadas por Apolonio hace más de dos mil años. No solo no fueron nombres arbitrarios y responden a la semántica de los términos, sino que también han hecho tanta fortuna que, de forma inamovible, han quedado vinculados al diccionario geométrico de las cónicas.

## ELEMENTOS GEOMÉTRICOS DE LAS TRES SECCIONES CÓNICAS

Es el momento de verificar algunos aspectos de las secciones cónicas. Por ejemplo, sean las tres secciones cónicas, sobre las que se va a recopilar sus elementos geométricos y vínculos que Apolonio demostró que existen entre ellos, y sea un conjunto de cuerdas paralelas en una elipse —por ejemplo, paralelas al segmento PQ—. Todo ello se muestra en la figura 7.



FIG. 7




Apolonio demostró que los centros de esas cuerdas se hallan sobre el diámetro AB de la elipse. También probó que si se dibuja una recta DE que pase por C —punto medio de AB— que sea paralela al conjunto original de cuerdas, la citada recta DE corta en el punto medio a todas las cuerdas paralelas a AB; se trata del diámetro conjugado de AB.

En el caso de la hipérbola, las cuerdas pueden estar en el interior de una de las ramas —así sucede con PQ— y, en ese caso, el diámetro es un segmento que va de una rama a la otra; como puede apreciarse en la figura, se trata del segmento AB. Las cuerdas paralelas al segmento AB —por ejemplo, RH y ST— se sitúan entre ambas ramas de la hipérbola, y el diámetro conjugado de AB, definido como media proporcional entre AB y el *latus rectum* de la hipérbola, no corta a la curva.

En la parábola, cualquier diámetro, es decir, una recta que pase por los puntos medios de un conjunto de rectas paralelas, siempre es paralelo al eje. No existe diámetro conjugado de un diámetro dado, puesto que las cuerdas paralelas a este tienen una longitud infinita.

Además, los ejes de una elipse y de una hipérbola son dos diámetros conjugados perpendiculares entre sí, mientras que en la parábola el eje es un diámetro cuyas cuerdas correspondientes son perpendiculares.

## LAS TANGENTES A LAS SECCIONES CÓNICAS

El Libro I trata también de las tangentes a las cónicas, aunque sin nombrarlas por esta palabra todavía. Para Apolonio, una «tangente» es una recta que tiene un solo punto común con la cónica y tiene cualquier otro punto fuera de esta. La tangente aparece en la proposición I.17, que establece que la paralela por el vértice de una sección cónica a las ordenadas, es tangente a la sección. En el lenguaje de Apolonio, la proposición I.17 afirma que dicha paralela por el vértice de una sección cónica «a una recta trazada de forma ordenada» —es decir a las ordenadas— «cae fuera de la sección» —es decir, es tangente a la sección—.

Al considerar la tangente a una cónica como la perpendicular por el extremo de un diámetro, de forma paralela a las ordenadas de este, Apolonio se inspiró en la famosa proposición III.16 de los *Elementos* de Euclides, relativa al círculo y que generaliza para una cónica cualquiera:

> La recta perpendicular en el extremo de un diámetro cae fuera del círculo; entre esta recta y la circunferencia no se interpone ninguna otra y el ángulo del semicírculo es mayor que cualquier ángulo rectilíneo agudo y lo restante menor —«ángulo córneo» o «ángulo de contingencia»—.

En la proposición I.32 de *Las cónicas*, relacionada con la citada proposición I.17, se demuestra la unicidad:

> La paralela desde el vértice de una sección cónica a una recta trazada ordenadamente es tangente a la sección y ninguna otra recta caerá entre la tangente y la sección.



Consideremos primero que la sección cónica sea una parábola de diámetro AB y tracemos por el punto A la recta AG paralela a una recta trazada ordenadamente. Como se ha demostrado que esta recta cae fuera de la sección, digo que cualquiera otra no cae entre AG y la curva. Si la sección es una hipérbola, una elipse o una circunferencia de círculo, cuyo diámetro es AB y AZ el parámetro, prolonguemos la recta BZ y tracemos por el punto A la paralela AG a una recta trazada de una manera ordenada. Como se ha demostrado que esta recta cae fuera de la sección, digo que cualquiera otra no caerá entre AG y la curva.

La segunda parte de la proposición se puede demostrar fácilmente, en términos algebraicos modernos, mediante la realización de la construcción indicada en el enunciado.

a) Caso de la parábola. Si en la parábola de diámetro AB y tangente AG en el vértice A, el punto D del segmento AD es exterior, entonces será ED > EH, y por tanto se tendrá:

$$\frac{ED^2}{EA^2} > \frac{EH^2}{EA^2},$$

y al ser AZ el parámetro correspondiente al diámetro AB de la proposición I.11, resulta:

$$EH^2 = ZA \cdot AE,\ TL^2 = ZA \cdot AT,$$

de modo que, llevado este valor a la relación anterior, se tiene:

$$\frac{ED^2}{EA^2} > \frac{ZA \cdot AE}{EA^2} = \frac{ZA}{EA},$$

y si se hace de forma que sea:

$$\frac{ZA}{AT} = \frac{ED^2}{EA^2} = \frac{ZA \cdot AT}{AT^2} = \frac{TK^2}{AT^2},$$

al aplicar expresiones anteriores, se verifica:

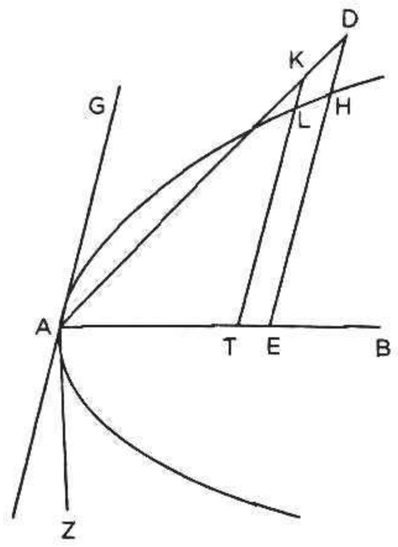
$$\frac{TL^2}{AT^2} = \frac{TK^2}{AT^2},$$

de donde resulta:

$$TL = TK,$$

lo cual es imposible. Todo ello queda verificado en la figura 8.

FIG. 8




b) Caso de la hipérbola y la elipse. Para ambas, al tener en cuenta las Proposiciones I.12 y I.13 y seguir la línea anterior, se tiene sucesivamente:

$$\overline{EH}^2 = EA \cdot EM,\ \overline{ED}^2 = EA \cdot EN,$$

$$\frac{ED}{EA} = \frac{EN}{ED} = \frac{TK}{TA},$$

$$\frac{\overline{ED}^2}{\overline{EA}^2} = \frac{\overline{EN}^2}{EA \cdot EN} = \frac{EN}{EA} = \frac{TP}{TA},$$

$$\frac{\overline{TK}^2}{\overline{TA}^2} = \frac{\overline{ED}^2}{\overline{EA}^2} = \frac{TP}{TA},$$

$$\overline{TK}^2 = TA \cdot TP = \overline{TL}^2,$$

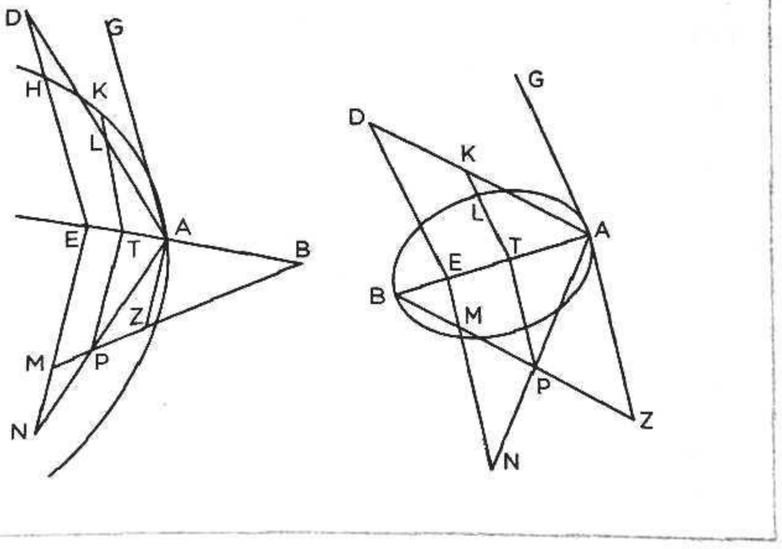
de donde resulta:

$$TK = TK,$$



lo cual es imposible, como puede apreciarse en la figura 9.

FIG. 9




El caso del círculo sería la propia proposición III.16 de los *Elementos* de Euclides, aludida con anterioridad.

En suma, si se traza una recta por un extremo de un diámetro de una elipse o una hipérbola, paralela al diámetro conjugado del primero, entonces esta recta «tocará a la cónica por el citado extremo y no es posible trazar otra recta entre ella y la cónica»; por tanto, la recta será tangente a la cónica. Se aprecia en Apolonio la naturaleza estática de la tangente a una curva, frente a la concepción cinemática de Arquímedes.

Más aún, en las proposiciones I.33 y I.35 se construye una tangente a la parábola por un punto cualquiera, y se demuestra su unicidad. En las proposiciones I.34 y I.36 se efectúa lo mismo para la hipérbola y la elipse.

En una traducción libre del texto de Apolonio, la existencia quedaría fijada de la siguiente forma:

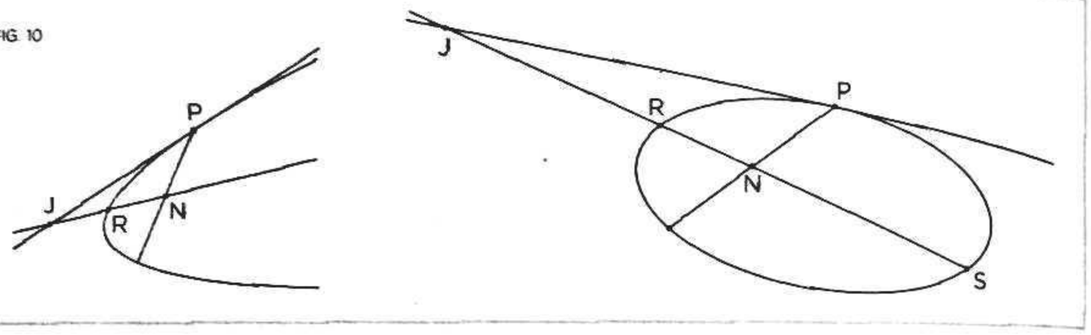
— Teorema I.33: Si desde un punto P de una parábola se traza la ordenada PN sobre el diámetro de vértice R, y se considera el punto $J \neq N$ sobre el diámetro, tal que $JR = RN$, entonces la recta PJ es tangente a la parábola.

— Teorema I.34: Si desde un punto P de una elipse o una hipérbola se traza la ordenada PN sobre el diámetro RS, y se considera el punto J ≠ N sobre RS tal que:

$$\frac{JR}{JS} = \frac{NR}{NS},$$

entonces, la recta PJ es tangente a la curva dada, como se aprecia en la figura 10.

FIG. 10




En el caso de la parábola, Apolonio demostró la proposición por reducción al absurdo, al probar que la recta JP no puede ser interior a la curva.

La proposición es recíproca de la que se utiliza actualmente y que se enuncia en la forma de que el vértice de la parábola biseca a la subtangente de cualquiera de sus puntos, una propiedad que permite trazar de forma sencilla la tangente.

## OTRAS PROPOSICIONES NOTABLES DEL PRIMER LIBRO

En la proposición I.46, Apolonio demostró que todas las paralelas $r$ al diámetro de una parábola son diámetros y las ordenadas PN respecto de $r$ son paralelas a la tangente por el punto en que $r$ corta a la curva.

Por su parte, en la proposición I.47 probó que todas las rectas que pasan por el centro C de una elipse, y que todas las rectas que pasan por el centro de una rama de hipérbola que la cortan, son



diámetros. Las ordenadas PN respecto de $r$ son paralelas a la tangente por los puntos T en que $r$ corta a la curva. En cuanto a la proposición I.48, generalizó el resultado a las dos ramas de la hipérbola. Por ello, de la conjunción de ambas proposiciones, se deduce que cualquier tangente a una elipse o a una hipérbola es paralela al diámetro conjugado del diámetro por el punto de contacto.

Las proposiciones siguientes, I.49 y I.50, pueden causar fatiga, pero no debe desdeñarse su importancia. En ellas, Apolonio verificó que si se toma cualquier otro diámetro de la cónica distinto del que se ha tomado hasta el momento como referencia fundamental, las propiedades definitorias de la cónica permanecen idénticas. Esta cuestión, en el lenguaje actual, equivale de hecho a establecer la posibilidad de considerar en cualquier momento la transformación de un sistema de coordenadas oblicuas en otro. La proposición I.51 debe entenderse como la extensión de esta propiedad —expuesta en la I.50 para una elipse y una rama de una hipérbola— a las dos ramas de una hipérbola.

Con estas tres proposiciones, I.49, I.50 y I.51, Apolonio concluyó el estudio de las propiedades de las tangentes y diámetros conjugados, con lo que se quedaba en condiciones de abordar la construcción de cónicas, dados algunos de sus elementos. Después de terminar la proposición I.51, Apolonio escribió lo siguiente a modo de resumen:

> Demostradas todas estas cosas, es claro que en la parábola las paralelas al eje son diámetros, mientras que en la hipérbola, en la elipse y en las secciones opuestas lo son todas las rectas que pasan por el centro; en la parábola, los cuadrados de las paralelas a las tangentes sobre los diámetros respectivos equivalen a rectángulos aplicados a una misma recta; pero esos cuadrados equivalen a áreas aplicadas a una recta y aumentadas en una figura en la hipérbola y en las secciones opuestas y disminuidas en esa figura en la elipse, y, finalmente, es claro que todas las cosas demostradas para las secciones referidas a los diámetros principales también son ciertas si se adoptan otros diámetros.

Son palabras verdaderamente notables, puesto que implican una trayectoria hacia la teoría de la transformación de los ejes de

coordenadas. Una traducción a lenguaje algebraico muestra la importancia que tiene cualquier par de diámetros conjugados, en el caso de la elipse y la hipérbola, así como un diámetro y la tangente por su vértice en el caso de la parábola, como elementos fundamentales de una referencia para obtener la ecuación reducida de la cónica. Y en particular, el caso singular, pero fundamental y más habitual de una referencia ortogonal —determinada por ordenadas perpendiculares al diámetro— que proporciona las coordenadas rectangulares, que tanto simplifican los problemas geométricos.

A partir de la proposición I.52 y hasta la proposición I.60 y última del Libro I de *Las cónicas*, Apolonio se encargó de mostrar cómo se pueden construir ciertas cónicas a partir de algunos datos, por ejemplo, un diámetro, el *latus rectum* y la inclinación de las ordenadas con respecto al diámetro. Al efecto, construyó en primer lugar el cono del que la cónica deseada es una sección. A estas proposiciones en concreto, las denominó «problemas».

También debe señalarse la importancia del cambio de referencia aplicado al estudio de la hipérbola respecto a sus asíntotas que aparece en la proposición I.60. Con ello, concluye de forma brillante el Libro I de *Las cónicas*.

## ALGUNOS PORMENORES DEL LIBRO II

El Libro II de *Las cónicas* abarca 53 proposiciones, buena parte de las cuales están consagradas, desde el principio, al estudio de las principales propiedades y al trazado de las asíntotas de la hipérbola.

Los teoremas finales del Libro II se muestran como «problemas»: por ejemplo, hallar un diámetro de una cónica, como se pide en la proposición II.44; hallar el centro de una cónica que lo posea —proposición II.45—; encontrar el eje de una parábola y los ejes de una cónica con centro —proposiciones II.46 y II.47—, y trazar tangentes —proposiciones II.49 y II.53—.

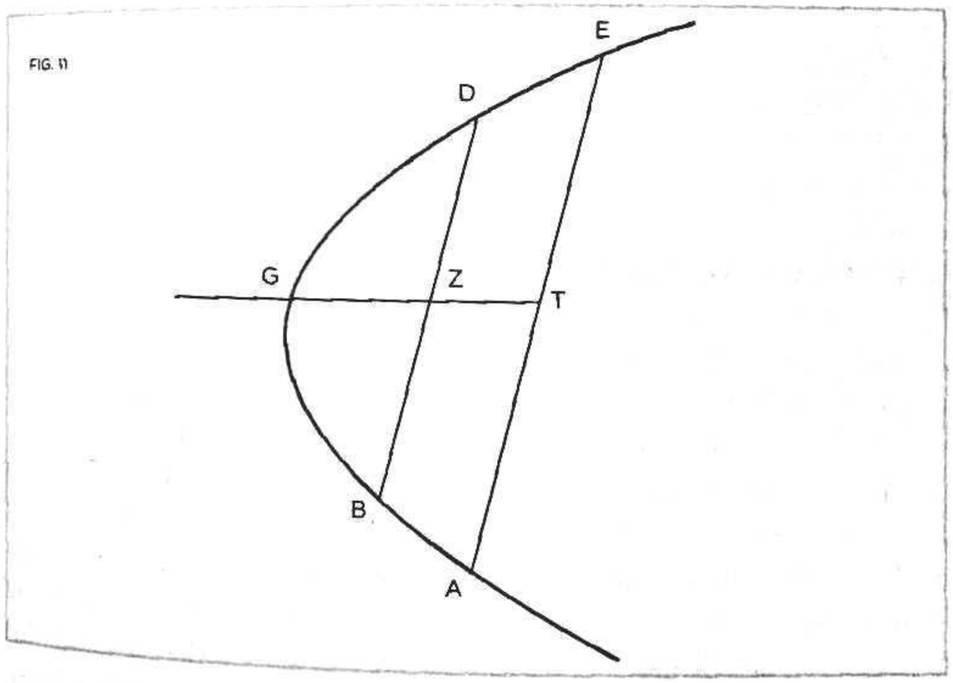
Por su interés, cabe explicar el desarrollo de las respuestas que aportó Apolonio a los «problemas» planteados en dos de ellas: la II.44 y la II.49.



En la proposición II.44, la construcción de un diámetro de sección cónica se plantea de la siguiente manera, para lo que se acompaña la figura 11:

> Sea una sección cónica que contiene los puntos A, B, G, D y E y se trata de construir uno de sus diámetros. Si lo suponemos construido y es el GT, las rectas DZ y ET, trazadas de una manera ordenada, serán iguales a las ZB y TA, respectivamente; luego si fijamos la posición de BD y EA de modo que sean paralelas, los puntos T y Z serán conocidos y quedará fijada la posición de la recta TZG.
>
> La construcción será, pues, la siguiente: Dada la sección cónica se toman en ella los puntos A, B, G y D; se une B con D; y se traza la recta AE paralela a la BD; se dividen en dos partes iguales estas rectas por los puntos Z y T, respectivamente, y la recta de unión ZT es un diámetro. Por este método se pueden construir todos los diámetros que se quiera.

FIG. 11




Por su parte, la proposición II.49 da la regla de Apolonio para la construcción de una tangente centra el problema en el siguiente enunciado: dada una sección cónica y un punto no situado en

el interior de la sección, trazar desde este punto una recta tangente a la sección cónica dada en un punto.

Apolonio supuso resuelto el problema en todos los casos que pueden presentarse en las tres cónicas y, después de analizarlos de forma exhaustiva, hizo la síntesis de cada uno de ellos y proporcionó la regla para la construcción de la tangente, que coincide con la que resulta de aplicar en la actualidad las correspondientes ecuaciones cartesianas, es decir, si $(\bar{x},\bar{y})$ es el punto de contacto en las tres curvas, parábola, elipse e hipérbola, respectivamente, se tiene:

a) Para la parábola $y^2 = 2px$, la tangente al punto $(\bar{x},\bar{y})$ es:

$$y\bar{y} = p(x + \bar{x}),$$

donde p es el semiparámetro.

b) Para la elipse $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$, la tangente al punto $(\bar{x},\bar{y})$ es:

$$\frac{x\bar{x}}{a^2} + \frac{y\bar{y}}{b^2} = 1.$$

c) Para la hipérbola $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$, la tangente al punto es:

$$\frac{x\bar{x}}{a^2} - \frac{y\bar{y}}{b^2} = 1.$$

## EL LIBRO III: FOCOS DE UNA CÓNICA

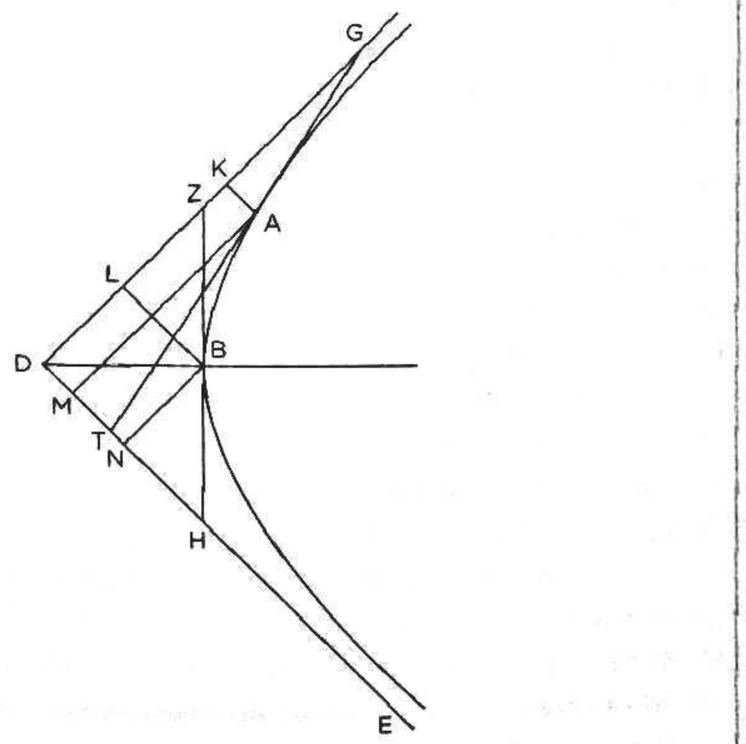
El Libro III está compuesto de 56 proposiciones. Las quince primeras demuestran ciertas relaciones sobre áreas de figuras de triángulos y cuadriláteros, resultado del encuentro de las tangentes con diámetros trazados por los puntos de contacto. Los ocho siguientes conciernen a rectángulos formados por los segmentos que determinan la intersección de cuerdas trazadas en las cónicas. La mayor parte de estas proposiciones son, desde su propio enunciado, una extensión a las cónicas de resultados geométricos análogos para el círculo. Las diez proposiciones siguientes tratan de las secantes, así como de su división armónica.

Aunque la proposición III.41 no se va a desarrollar en estas páginas, debe destacarse de ella que demuestra que si tres tangentes de una parábola se cortan mutuamente, quedan divididas en la misma razón. Esta proposición, al permitir trazar un número cualquiera de tangentes a la parábola, implica un procedimiento de construcción de esta curva por medio de tangentes.

En cambio, sí que se va a desarrollar la proposición III.43, que demuestra la bellísima propiedad de la tangente a la hipérbola cortando a las asíntotas, segmentos cuyo producto es constante, y por lo tanto pone de relieve la constancia del área del triángulo formado por la tangente y las dos asíntotas.

Así, en esta proposición, el rectángulo de las rectas que una tangente a la hipérbola determina en las asíntotas a partir del centro, equivale al de las que determina la tangente en el vértice, como recoge la figura 12.

FIG. 12



Sea AD una hipérbola de asíntotas DG y DE y eje DB. Tracemos por B la tangente ZBH y otra GAT en un punto cualquiera A. Digo que el rectángulo de DZ y DH equivale al de DG y DT. En efecto, tracemos por A y B las AK y BL paralelas a DE, y AM y BN paralelas a DG, y entonces, por ser GAT tangente y AG igual a AT, es GT doble de AT, CD doble de AM y DT doble de AK; luego el rectángulo de DG y DT es cuádruple del de AK y AM.

De igual modo se demostraría que el rectángulo de DZ y DH es cuádruple del de BL y BN, y como este es equivalente al de AK y AM, los rectángulos de AK, AM y BL, BN son equivalentes, así como los de DG, DT y DZ, DH, y análogamente se demostraría que lo mismo ocurre cuando la recta BD es diámetro, pero no eje.

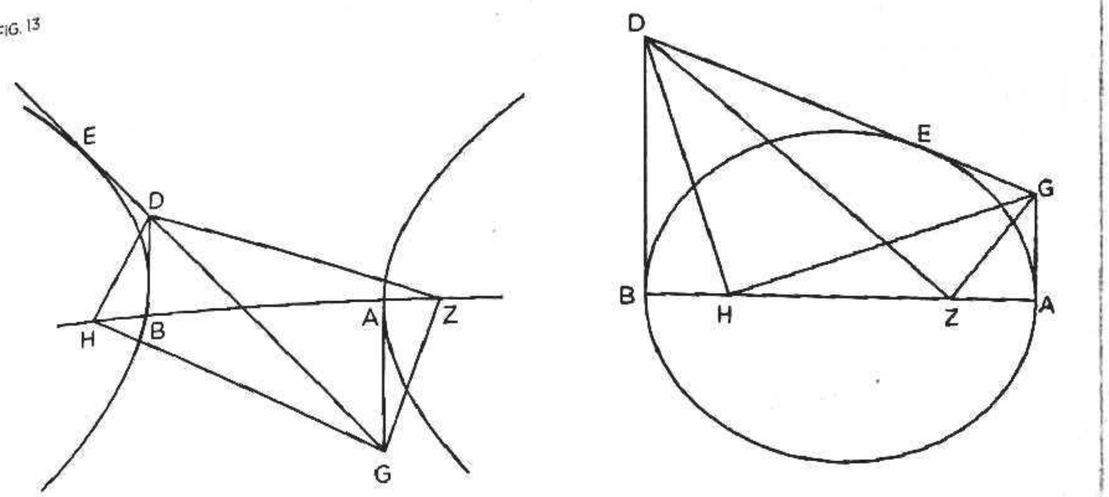
Los exegetas de Apolonio remarcan los últimos términos en que se expresó en esta proposición, en la que amplía su validez para cualesquiera tangentes a la hipérbola, de lo cual deduce inmediatamente la admirable propiedad de la constancia del área del paralelogramo delimitado por los segmentos que la tangente determina sobre las asíntotas, y en consecuencia la constancia del área del triángulo formado por la tangente a la hipérbola con sus asíntotas.

Es el momento de centrarse en las últimas proposiciones del Libro III, que revelan algunas propiedades focales de las cónicas. Llegados a este punto, de alguna manera acapara la atención la proposición III.45, que demuestra especialmente que, en la hipérbola y en la elipse, el segmento de una tangente interceptado entre dos perpendiculares trazadas en las extremidades del eje, es visto desde los focos en ángulo recto —figura 13—. En palabras literales de Apolonio:

> Si en una hipérbola, elipse, circunferencia de círculo o secciones opuestas se levantan perpendiculares en los extremos del eje, se aplica a uno y otro lado un rectángulo equivalente a la figura, aumentado en un cuadrado en la hipérbola y en las secciones opuestas y disminuido en la elipse, y se traza una tangente a la sección que corte a las perpendiculares, las rectas que unen los puntos de contacto con los procedentes de la aplicación son perpendiculares en los puntos de que acabamos de hablar.



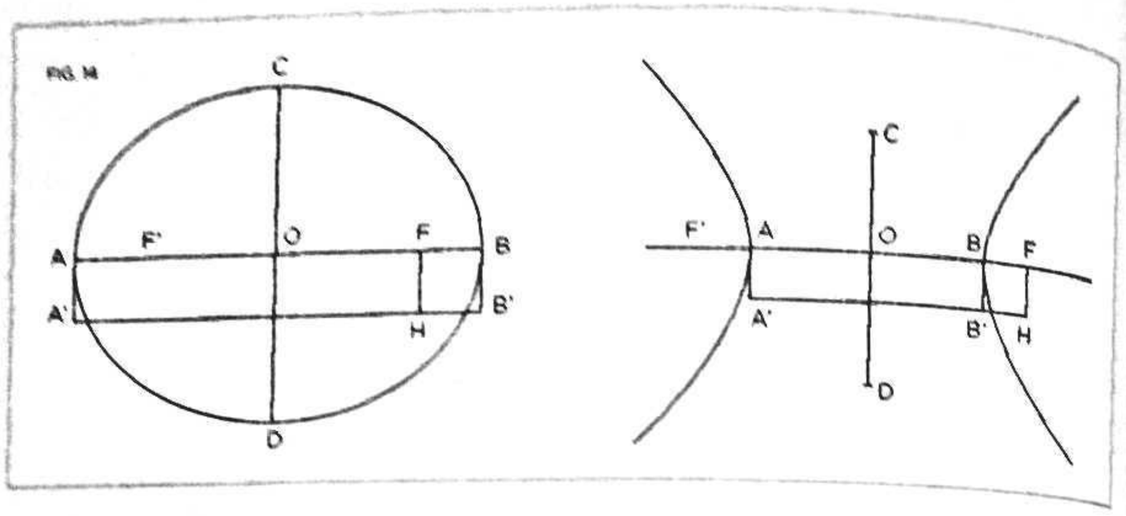
FIG. 13




Paradójicamente, el enunciado de esta proposición, sin duda una de las más importantes de Apolonio, es bastante oscuro. Sin embargo, aporta de una manera subsidiaria, y por primera vez, la noción de los focos en *Las cónicas*, es decir, los puntos que resultan al aplicar al eje el rectángulo característico, aumentado o disminuido en un cuadrado, según se trate de una hipérbola o de una elipse, y, por tanto, dividen el eje mayor de esta y al transverso de aquella en dos segmentos cuyo producto es igual al cuadrado del semieje conjugado; o, si se prefiere emplear la terminología de Apolonio, «igual a la cuarta parte de la figura, o sea del rectángulo cuyos lados son el eje mayor y el parámetro».

Se trata de un uso de la clásica «aplicación de las áreas»: aplicación parabólica de un área dada, aplicación elíptica —por defecto— o aplicación hiperbólica —por exceso— de un cuadrado. En conjunto, suponen una herencia euclidiana, concretamente de las proposiciones VI.28 y VI.29 del libro de los *Elementos*. Ambas proposiciones, por su importancia, quedan plasmadas en la figura 14.

Para realizar la construcción de estas últimas figuras, en primer lugar es necesario aplicar, a lo largo del eje mayor de la elipse, o a lo largo del eje transverso de la hipérbola, un rectángulo AA'BB' = ¼ figura característica = ¼ AB · parámetro = ¼ $CD^2 = OD^2$.




Después, reducir este rectángulo en la elipse, o aumentarlo en la hipérbola, de una figura cuadrada FBB'H, es decir, de un pequeño cuadrado cuyo lado FB es igual a la altura FH de la figura rectangular característica que tiene como base el eje entero AB.

Al realizar esta construcción, a partir de cada uno de los extremos del eje, se obtienen, entonces, dos puntos, F y F', que se llaman «focos» de la cónica, a los que Apolonio designará constantemente mediante la perífrasis «puntos procedentes de la aplicación».

El nombre de focos proviene de los geómetras del Renacimiento, a causa de sus relevantes propiedades ópticas. Al parecer el término fue acuñado por Kepler.

«La meditación sobre los libros de Apolonio hará posible la revolución astronómica operada por Kepler.»

— Alexandre Koyré (1892-1964), historiador científico ruso.

## LA AUTORÍA DE LA INVENCIÓN DE LOS FOCOS

Apolonio solo determinó el foco de la elipse y la hipérbola, lo cual no quiere decir que ignorase el foco de la parábola, ni la directriz de las cónicas, ni tampoco que fuera él quien descubriera estos elementos notables. Aunque *Las cónicas* sea el documento auténtico más remoto donde aparecen de forma explícita los focos, no se puede asegurar que el «gran geómetra» fuera el inventor de estos puntos. Si no se han encontrado las propiedades focales en su predecesor inmediato, Arquímedes, es porque en sus magníficas proposiciones geométricas no tenía necesidad alguna, ya que intervenía otro punto fundamental independiente de los focos, el centro de gravedad de las cónicas, los conoides y los esferoides.

La coordinación de los conocimientos anteriores sobre cónicas, muy bien completados en la obra de Apolonio, no implica que este quisiera exponer todas las teorías ya consideradas como clásicas en su época, a saber: los cuatro libros de Euclides sobre las *cónicas*, los cuatro libros sobre los *Lugares sólidos* de Aristeo —donde las cónicas son consideradas como lugares geométricos—, etcétera. Se puede suponer que estas obras contenían la noción de foco, puesto que Pappus de Alejandría, que las tuvo a su disposición, encontró en ellas los lemas que desembocaron en la descripción de las tres cónicas con la ayuda de los focos y la directriz, lo que reflejó el Libro VII de la *Colección matemática*.

Apolonio habría vinculado la importancia de un descubrimiento propio mencionándolo en algún preámbulo, en lugar de determinar el foco de manera subsidiaria, y le habría dedicado una serie de merecidas proposiciones particulares. En cambio, las proposiciones que consagró a los focos son escasas.

## ECUACIONES CARTESIANAS A PARTIR DE LOS TEOREMAS DE APOLONIO

Las proposiciones III.46, III.47, III.48, III.49 y III.50 relacionan propiedades donde intervienen focos y tangentes hasta llegar a dos de los más importantes resultados geométricos del Libro III de *Las cónicas*, sobre todo por su proyección académica. Se trata de las proposiciones III.51 y III.52, ya en el tramo final de este tercer libro. Una vez más, sus enunciados son bastante abstrusos, así que en traducción libre se pueden expresar en la forma:

— Proposición III.51. La diferencia de las distancias de cada punto de la hipérbola a los dos focos es constante e igual al eje transverso.

Es pues, por el método de «aplicación de las áreas», tan utilizado por los geómetras griegos, que Apolonio descubrió esta propiedad tan importante de la hipérbola, que proporciona el método para trazar la curva mediante un movimiento continuo y, además, sirve generalmente para definirla de forma planimétrica en los manuales de geometría elemental: «la hipérbola es una curva plana formada por los puntos que cumplen que la diferencia de distancias a dos puntos fijos de su plano es una longitud constante».

— Proposición III.52. La suma de los radios vectores trazados desde los focos a cada uno de los puntos de la elipse es constante e igual al eje mayor.

De la misma manera que en la proposición anterior, relativa al caso de la hipérbola, Apolonio alcanzó por el método de «aplicación de las áreas» esta propiedad esencial de la elipse, que proporciona el método para trazar la curva mediante un movimiento continuo. De forma planimétrica, se define de la siguiente manera: «la elipse es una curva plana formada por los puntos que cumplen que la suma de distancias a dos puntos fijos de su plano es una longitud constante».

Al igual que en el caso de la hipérbola, esta propiedad es la que se toma como definición de la elipse en los textos actuales de geometría elemental.

Es el momento de construir ecuaciones cartesianas de la elipse y la hipérbola a partir de los teoremas de Apolonio.

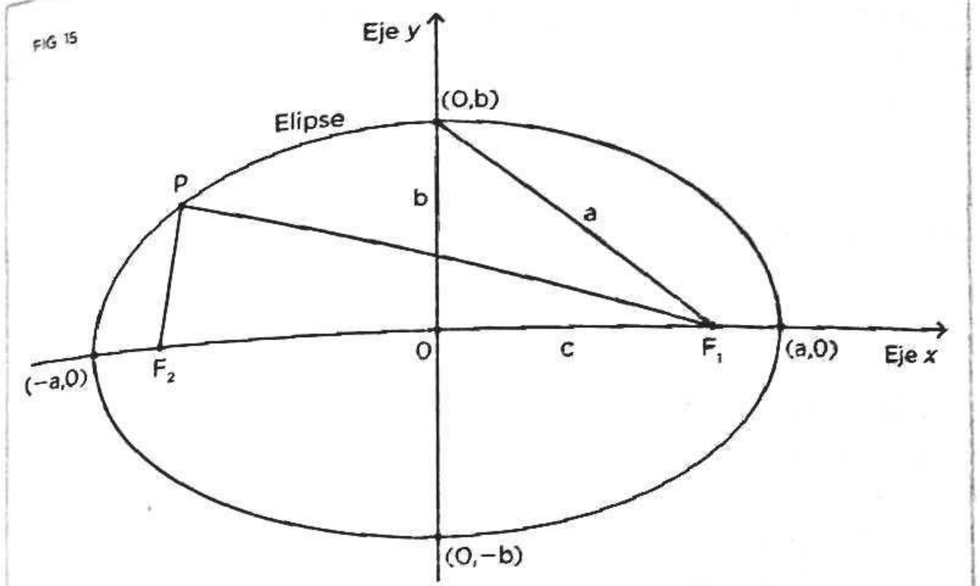
Según la proposición III.52 de *Las cónicas*, a partir de la figura 15 que aquí se adjunta, la elipse queda definida por los puntos que cumplen:

$$d(P, F_1) = d(P, F_2) = 2a.$$

Para simplificar el cálculo, se considera como el eje de abscisas, OX, la recta que contiene a los focos $F_1$ y $F_2$; y como de ordenadas, OY, a la recta perpendicular que pasa por el punto medio del segmento determinado por los focos. De esta forma, la elipse tendrá su centro en el origen de coordenadas y los focos serán los puntos $F_1 = (c, 0)$ y $F_2 = (-c, 0)$.



FIG 15




Para un punto $P = (x, y)$ de la elipse, se puede escribir:

$$d(P,F_1) + d(P,F_2) = \sqrt{(x-c)^2 + y^2} + \sqrt{(x-c)^2 + y^2} = 2a.$$

De donde resulta:

$$\sqrt{(x-c)^2 + y^2} = 2a - \sqrt{(x-c)^2 + y^2}.$$

Al elevar al cuadrado y trasponer términos, se obtiene:

$$4a\sqrt{(x-c)^2 + y^2} = 4a^2 + 4cx.$$

Si se eleva de nuevo al cuadrado, se hacen operaciones y se reagrupan términos, se llega a la expresión:

$$(a^2 - c^2)x^2 + a^2y^2 = a^2(a^2 - c^2),$$

de la cual, al dividir ambos miembros de la igualdad por $a^2(a^2-c^2)$, resulta:

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{\left(a^2-c^2\right)}=1.$$

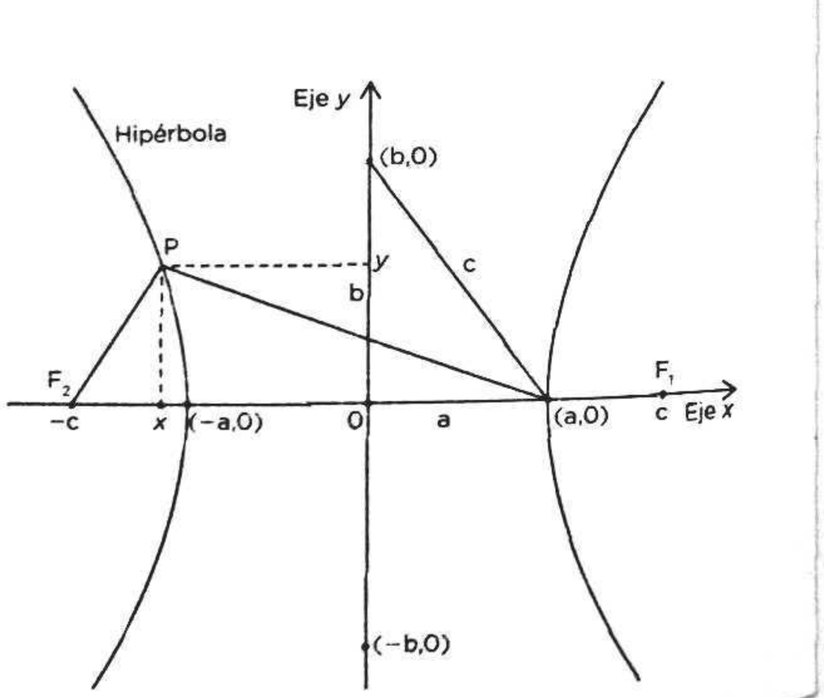
Finalmente, al tomar b, tal que $b^2=a^2-c^2$, se obtiene la ecuación buscada de la elipse:

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1.$$

También se pueden construir ecuaciones cartesianas de la hipérbola a partir de los teoremas de Apolonio. Según la Proposición III.51, a partir de la figura 16, la hipérbola queda definida por los puntos que cumplen:

$$\left|d(P,F_1)-d(P,F_2)\right|=2a.$$

FIG. 16




Para simplificar el cálculo, como en el caso de la elipse, se considera el eje de abscisas, OX, la recta que contiene a los focos $F_1$ y $F_2$ y como de ordenadas, OY, a la recta perpendicular que pasa por el punto medio del segmento determinado por los focos.

De esta forma, la hipérbola tendrá su centro en el origen de coordenadas y los focos serán los puntos $F_1=(c,0)$ y $F_2=(-c,0)$.

Para un punto $P=(x,y)$ de la hipérbola se puede escribir:

$$\left|d(P,F_1)+d(P,F_2)\right|=\left|\sqrt{(x-c)^2+y^2}-\sqrt{(x+c)^2+y^2}\right|=2a.$$

De donde resulta:

$$\sqrt{(x-c)^2+y^2}=2a+\sqrt{(x+c)^2+y^2}.$$

Al elevar al cuadrado y trasponer términos, se obtiene:

$$4a\sqrt{(x+c)^2+y^2}=-4a^2-4cx.$$

Si se eleva de nuevo al cuadrado, se hacen operaciones y se reagrupan términos, se llega a la expresión:

$$\left(c^2-a^2\right)x^2-a^2y^2=a^2\left(c^2-a^2\right),$$

de la cual, al dividir ambos miembros de la igualdad por $a^2(c^2-a^2)$, resulta:

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{\left(c^2-a^2\right)}=1.$$

Finalmente, al tomar b, tal que $b^2=a^2-c^2$, se obtiene la ecuación buscada de la elipse:

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1.$$

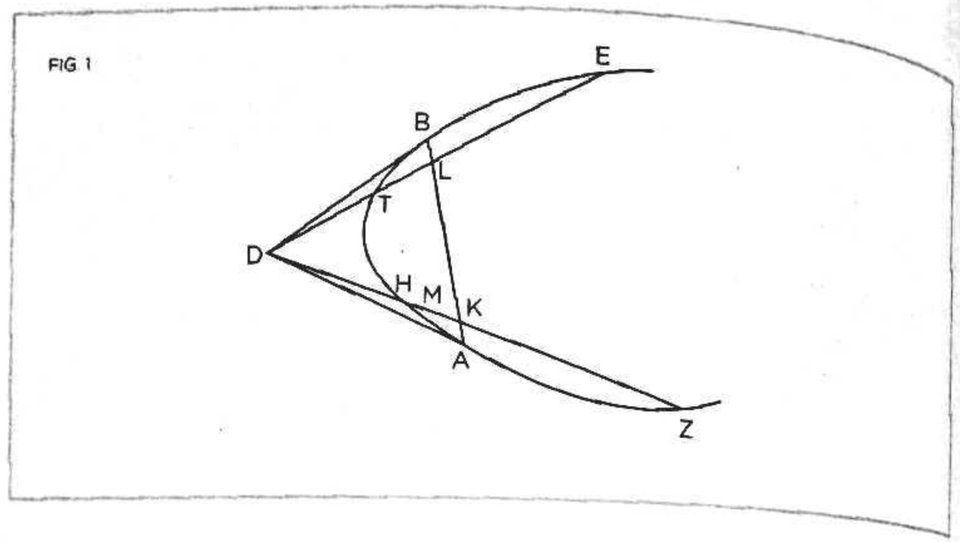
CAPÍTULO 3

# De intersecciones, segmentos extremos, semejanzas, tangentes y normales

Apolonio plasmó de forma magistral sus hallazgos para la geometría en los libros IV, V, VI y VII de *Las cónicas*. De todos ellos destaca el Libro V, sobre el que Christiaan Huygens edificaría los cimientos de la geometría diferencial en el siglo XVII. Por su parte, las proposiciones del Libro VII aún ocupan un lugar de honor en los textos modernos sobre cónicas, ya que contienen la teoría de los diámetros conjugados y las figuras que se construyen sobre ellos.

El Libro IV de *Las cónicas* de Apolonio agrupa 57 proposiciones y continúa, en parte, los planteamientos del libro precedente. Las 23 primeras proposiciones fueron demostradas por Apolonio mediante el método de reducción al absurdo y, en suma, no constituyen más que las recíprocas de las proposiciones 30 a 40 del Libro III. La más importante de ellas, no obstante, es la proposición IV.9, que proporciona un método práctico para trazar dos tangentes a una cónica desde un punto exterior. Al efecto, Apolonio hizo pasar por este punto dos secantes cualesquiera y probó que la recta que une los puntos armónicamente separados cortaba a la cónica en los puntos de contacto de la tangente, como se verá en la figura 1. Las 34 proposiciones siguientes, es decir, las proposiciones IV.24 a IV.57, conciernen al número real de intersecciones y contactos que se pueden presentar entre las diversas secciones cónicas y también la circunferencia del círculo.

Hay que señalar que no todas estas proposiciones fueron originales, ya que Apolonio comentó en el preámbulo de *Las cónicas*, dirigido a Atalo, que algunas de ellas habían sido ya expuestas por un matemático del siglo III a.C.: Conon de Samos, discípulo de Euclides y maestro y amigo de Arquímedes. Este brillante geómetra está considerado como el precursor de Apolonio en la teoría de la intersección de curvas de segundo grado, pero al respecto debe subrayarse un hecho fundamental: Conon de Samos desco-



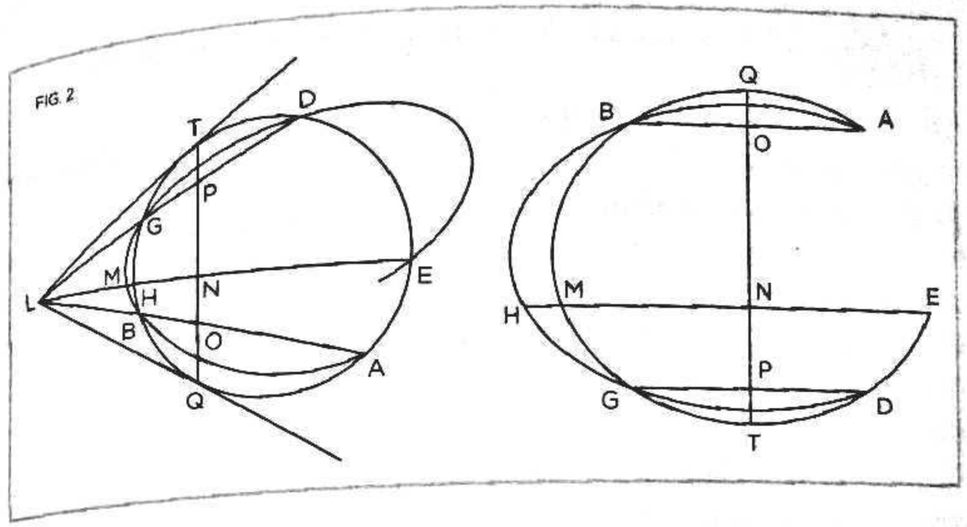

nocía la noción de las dos ramas de la hipérbola como elementos de una única curva. Esto, por descontado, era una cuestión imprescindible para hacer progresar la materia; los geómetras clásicos debían encontrar los recursos que proporcionarían la discusión de la ecuación completa de segundo grado.

Por todo ello, esta teoría se puede considerar, en gran parte, como obra original de Apolonio, y no solo por el absoluto rigor con el que demostró los resultados geométricos ya conocidos con anterioridad, la bellísima y ordenada presentación y sistematización que hizo de los mismos y la multitud de casos particulares que aportó y estudió sobre intersecciones y contactos, sino también porque fue, en definitiva, el primer matemático que reconoció la gran utilidad de esta teoría para la síntesis y la discusión de una multitud de problemas geométricos.

Una de las proposiciones más importantes y conocidas de Apolonio es la IV.25, que se ilustra en la figura 2 y en la que el sabio de Perga se expresó en estos términos:

> Una sección cónica no corta a otra o a una circunferencia en más de cuatro puntos. Suponiendo que las dos secciones se cortan en los cinco puntos, A, B, G, D y E en este orden, tracemos las rectas AB y GD que, prolongadas, se cortarán en un punto L exterior a las secciones si trata de una parábola o de una hipérbola, y sea OA a OB como LA a LB y PD a PL como LD a LG. La recta PO, prolongada a uno y otro lado, cortará a la sección, y las rectas trazadas






desde sus puntos de intersección T y Q al A serán tangentes, y por cortar la LE a las dos secciones porque estas no tienen ningún punto común entre B y G, sean M y H esos puntos, y entonces NE será NH como LE a LH en una de las secciones y NE a NM como LE a LM en la otra N, lo cual es imposible; luego también es imposible lo que supusimos al principio.

Si las rectas AB y DG son paralelas, las dos cónicas serán elipses o una elipse y la otra circunferencia. Dividiéndolas en dos partes iguales por los puntos O y P, la recta de unión OP prolongada a uno y otro lado, cortará a las secciones en T y Q, la TQ será un diámetro y las AB y GD ordenadas y entonces, trazando por el punto E la ENMH paralela a AB y GD, cortará a TQ y a las dos secciones porque no hay más puntos de intersección que A, B, G y D, de donde resulta que en una sección la recta NE es igual a NM y en la otra a NH, lo cual es imposible.

Esta proposición fue complementada con la IV.26, en la que Apolonio afirmó que «si las líneas de que acabamos de hablar se tocan mutuamente en un solo punto, no se cortarán en más de otros dos», y por las proposiciones 27 a 29, que pueden resumirse en que si dichas líneas «se tocan mutuamente en dos puntos, no se cortarán en ninguno otro». En otras proposiciones interesantes del Libro IV, Apolonio se explayó en resultados geométricos en torno al comportamiento de las dos ramas de la hipérbola; al fin y al cabo, introducidas por su sagacidad.

Así, respecto a los contactos, dejó dicho:

— Proposición IV.30: Una parábola no toca a otra en más de un punto.
— Proposición IV.31: Una parábola exterior a una hipérbola no la tocará en dos puntos.
— Proposición IV.32: Una parábola interior a una elipse o a una circunferencia de círculo, no será tangente en dos puntos.
— Proposición IV.33: Dos hipérbolas del mismo centro no serán tangentes en dos puntos.
— Proposición IV.34: Si una elipse toca a otra o a una circunferencia del mismo centro en dos puntos, la recta de contactos pasará por el centro.

En cuanto a los cortes que se producen o resultan imposibles, el «gran geómetra» estableció las siguientes conclusiones probadas:

— Proposición IV.37: Una cónica o una circunferencia que corta a una de las secciones opuestas [de una hipérbola] no cortará la otra sección en más de dos puntos.
— Proposición IV.38: Una cónica o una circunferencia no cortará a las secciones opuestas [de una hipérbola] en más de cuatro puntos.
— Proposición IV.39: Si una cónica o una circunferencia es tangente a una de las secciones [de una hipérbola] en su parte cóncava no cortará a la otra sección.
— Proposición IV.40: Si una cónica o una circunferencia es tangente a las secciones [de una hipérbola] opuestas en un punto, no las encontrará en ninguno otro.
— Proposición IV.44: Si una hipérbola corta a una de las secciones opuestas [de una hipérbola] en cuatro puntos, su sección opuesta no encontrará ninguna otra.

Por último, cabe citar la proposición IV.55, en la que se sostiene que las secciones opuestas de una hipérbola no cortan a las secciones opuestas en más de cuatro puntos.



## LA IMPORTANCIA DEL LIBRO V

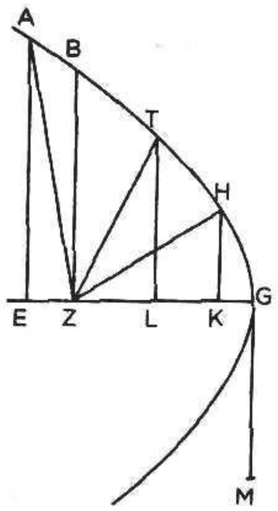
El Libro V de *Las cónicas* es uno de los que más ha contribuido a elevar la gloria de Apolonio como geómetra. Contiene 77 proposiciones y está totalmente dedicado a las líneas máximas y mínimas, es decir, las rectas más largas y más cortas que se pueden trazar desde un punto al perímetro de una sección cónica. En realidad, son teoremas sobre tangentes y normales. Apolonio supuso en primer lugar que el punto dado está situado sobre el eje de la sección cónica, y de este modo resolvió una infinidad de problemas con una elegancia primordial. A continuación, extendió sus investigaciones al caso en que el punto está situado fuera del eje, lo que le condujo a teoremas todavía más complejos. Sin duda, fue muy consciente del valor que estaba adquiriendo su trabajo geométrico, de lo que dejó constancia en el citado preámbulo dirigido a Atalo.

«Esta materia es indispensable no solo para los que cultivan nuestra ciencia, sino también en vista del análisis y la discusión de los problemas, más todavía e incluso para su síntesis; aparte de ser uno de los temas dignos de estudio por su valor intrínseco.»

— Apolonio de Perga.

La mayoría de las proposiciones de este Libro V se acercan de forma muy llamativa a las teorías modernas sobre rectas normales, evolutas y evolventes y demás problemas que contienen el germen conceptual de *Horologium oscillatorium* (1673), la obra capital de Christiaan Huygens. Como se sabe, la matemática griega no disponía de una definición muy satisfactoria de la tangente a una curva C en un punto P. Se la consideraba como una recta $r$ que tiene un único punto P común con la curva, y de tal forma que no pueda trazarse ninguna otra recta pasando por P y situada entre la recta $r$ y la curva C. Tal vez Apolonio no encontró muy adecuada esta definición de tangente y evitó definir la normal a una curva C desde un punto Q, como la recta por Q que corta a la curva en un punto P y es perpendicular a la tangente a la curva C por P. En lugar de hacerlo así, utilizó para definir la normal el hecho de que

FIG. 3




la distancia del punto Q a la curva C es un mínimo o un máximo relativo si se mide precisamente a lo largo de la normal.

A partir de aquí se repasan algunas proposiciones para cada una de las secciones cónicas sobre rectas mínimas trazadas desde un punto de eje. Por ejemplo, la proposición V.4, que Apolonio redactó de esta forma:

Si por un punto del eje de la parábola a una distancia del vértice igual a la mitad del parámetro se trazan secantes a la curva, la menor es la situada en el eje, las otras crecen a medida que se alejan de esta y la diferencia de los cuadrados de una de ellas y la mínima equivale al cuadrado del segmento del eje comprendido entre el vértice y el pie de la ordenada.

Ahora, puede aclararse la proposición mediante una notación y desarrollo modernos. De este modo, sea la parábola de eje GE y semiparámetro GZ. Si se trazan, como se muestra en la figura 3, las rectas ZG, ZH, ZT, ZB y ZA, las ordenadas de los puntos de intersección con la curva y la GM = GZ perpendicular al eje, sin perder de vista la proposición I.11, se tiene lo siguiente:

$$HK^2 = 2GM \cdot GK = 2GZ \cdot GK.$$

Ahora, sumando a los dos miembros de esta igualdad el cuadrado de ZK = ZG − KG, resulta:

$$HK^2 + ZK^2 = ZH^2 =$$
$$= 2GZ \cdot GK + \left(ZG^2 + KG^2 - 2GZ \cdot GK\right) = ZG^2 + KG^2.$$

De donde resulta:

$$ZH^2 - ZG^2 = KG^2.$$

Y de forma análoga es:

$$ZA^2 - ZG^2 = EG^2.$$



Y al ser:

$$ZB^2 = 2GM \cdot GK = 2ZG^2,\ ZA^2 - EG^2 = ZG^2$$

resulta de inmediato:

$$ZA > ZB > ZT > ZH > ZG.$$

Las proposiciones V.5 y V.6 inciden en que esta propiedad se mantiene tanto en las secantes a la hipérbola como en la elipse, si bien con puntualizaciones. En otros órdenes, la proposición V.7 afirma que «la menor distancia a una sección cónica desde un punto tomado en la recta mínima es la que hay del punto al vértice de la curva, y de todas las rectas trazadas a un mismo lado del eje, la menor es la más próxima a la mínima». La siguiente proposición, V.8, fue un resultado geométrico que Carl B. Boyer calificó como

**CHRISTIAAN HUYGENS**

El astrónomo, físico y matemático neerlandés Christiaan Huygens (1629-1695) enriqueció los orígenes de la geometría diferencial al estudiar la curvatura de las curvas planas, genialmente intuida por Apolonio en el Libro V de *Las cónicas*. Huygens expuso sus conclusiones en *Horologium oscillatorum* (1673), obra en la que también planteó la fuerza centrífuga en un movimiento circular y la teoría del centro de oscilación, entre otras cuestiones. Su talento matemático quedaría ratificado, además, con la resolución de diversos problemas geométricos, como la determinación de la curvatura de la cicloide y la rectificación de la cisoide. Cabe añadir que en el terreno de la astronomía inventó una lente ocular de telescopio con la que realizó notables descubrimientos —por ejemplo, Titán, la mayor luna de Saturno— y que también destacó como físico: elaboró la teoría ondulatoria de la luz y, a partir de la misma, explicó la reflexión, refracción y doble refracción de la luz.

***Retrato de Christiaan Huygens,*** **obra del pintor neerlandés Bernard Vaillant (1632-1698).**

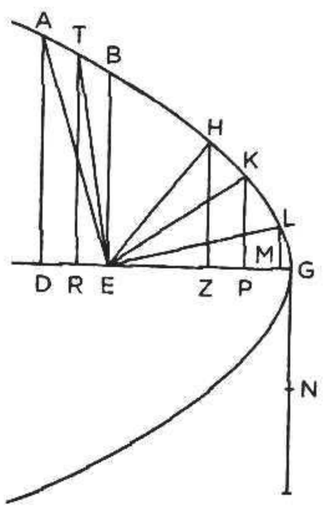
«un teorema relativo a la normal a una parábola que hoy podría formar parte de un curso de cálculo diferencial». De formularse dicho teorema según la terminología moderna, se recogería que:

> La subnormal de la parábola correspondiente a un punto cualquiera de la curva $y^2 = 2px$, es constante e igual a p, donde p es el parámetro.

Esta afirmación es mucho más clara que el enunciado de Apolonio, que no obstante se plasma aquí para realizar su desarrollo:

> Si desde un punto de una parábola situado a una distancia del vértice mayor que la mitad del parámetro, se toma del lado del vértice un segmento igual a la mitad del parámetro y se levanta en su extremo la perpendicular al eje hasta que encuentre a la curva, la recta que une su punto de intersección con el tomado en el eje, es la menor de todas las que se pueden trazar desde dicho punto a la curva; las demás van creciendo a medida que se alejan de esta y la diferencia entre los cuadrados de una de esas rectas y la mínima es equivalente al del segmento comprendido entre los pies de las ordenadas de dichas rectas y el punto fijado en el eje.

FIG. 4




Ahora, es el turno de la explicación mediante la matemática moderna, con el apoyo de la figura 4. Dada la parábola ABG y en su eje GD un punto E cuya distancia al vértice G es mayor que el semiparámetro, se toma el segmento EZ igual a este; se traza en Z la perpendicular ZH al eje, y, uniendo su punto de intersección H con el E y este con otros puntos L, K, A de la parábola, la recta EH es la menor de todas las que parten de E. Las otras son EK > EL > EG, y la diferencia de los cuadrados de estas y el de EH equivale al cuadrado del segmento comprendido entre el punto Z y los pies de las ordenadas. Si se observa que, por construcción, es EZ = GN, y se recuerda la proposición I.11, se tiene:

$$2GN \cdot GP = 2EZ \cdot GP = KP^2,$$

y al ser

$$EP^2 = (EZ + ZP)^2 = EZ^2 + ZP^2 + 2EZ \cdot ZP.$$

Al efectuar operaciones, resulta:

$$2EZ(GP + ZP) + EZ^2 + ZP^2 = 2EZ \cdot ZG + EZ^2 + ZP^2 = EK^2.$$

Y ya que según la proposición I.11, de nuevo, se tiene:

$$2GN \cdot ZG = 2EZ \cdot ZGP = ZH^2,$$

al poner este valor en la última expresión, se obtiene:

$$\left(ZH^2 + EZ^2\right) + ZP^2 = EH^2 + ZP^2 = EK^2.$$

Es decir:

$$EK^2 - EH^2 = ZP^2.$$

Y de forma análoga, resulta:

$$EL^2 - EH^2 = ZM^2,\ EG^2 - EH^2 = ZG^2.$$

De estas igualdades, surge inmediatamente:

$$EK > EL > EG > EH,$$

por tanto, la recta EH es más pequeña —es la recta mínima— que toda otra recta desde el punto E a la sección cónica. Es digno de observar que la perpendicularidad, que ahora se toma como definición, aquí viene demostrada como un teorema; mientras que, de

forma recíproca, la propiedad de máximo o mínimo, ahora algo a demostrar, Apolonio la tomó como definición. Las proposiciones V.9 y V10 pueden resumirse a grandes rasgos en que la hipérbola y la elipse tienen propiedades análogas a la demostrada para la parábola

## RECTAS MÁXIMAS Y MÍNIMAS

Apolonio amplió sus investigaciones sobre rectas máximas y mínimas al caso en que el punto está situado fuera del eje. Por motivos de extensión, aquí solo se desarrollará la proposición V.12, que Apolonio presentó con este enunciado y conclusión:

> Si en las condiciones anteriormente establecidas, se toma un punto en una recta mínima trazada desde el eje de una cónica, y se trazan por él rectas a este de un mismo lado, la menor es la parte de la mínima adyacente a la cónica y las mas próximas a esta parte serán menores que las más lejanas. Sea AB una sección cónica de eje GB y GA una recta mínima en la cual tomamos un punto D. Digo que DA es la menor distancia de D a la cónica.

Para su demostración resulta imprescindible trazar, efectivamente, otras rectas DE, DZ y DB, como se puede apreciar en la figura 5. Al unir los puntos E y Z con G y los A, E, Z y B entre sí, se obtendrá, por ser GE > GA:

$$\left.\begin{matrix} GAE > GEA \\ GEA > DEA \end{matrix}\right\} \quad GAE = DAE > DEA, DE > DA$$

y, análogamente, se demuestra que es:

$$DZ > DE, DB > DZ,$$

y por tanto:

$$DA < DE < DZ > DB.$$

Las siguientes proposiciones establecen un interesante teorema de unicidad para cada una de las cónicas:



— Por un punto de una cónica solo se puede trazar una única recta mínima (o máxima) —que será una única normal—, que será perpendicular a la tangente a la cónica en el punto dado.

La proposición V.24 presenta el siguiente enunciado, que aquí se acompaña de la figura 6:

> Desde un punto de una cónica solo se puede trazar al eje una recta mínima. Sea en primer lugar la parábola AB de eje GB y en ella un punto A. Si desde este punto se pudieran trazar dos rectas mínimas AC y AD al eje, las distancias ED y EG del pie E de la ordenada de A a los D y G serían iguales al semiparámetro [según la proposición 13], lo cual es imposible.

Por su parte, la proposición V.25 sostiene que esta propiedad se verifica también para la hipérbola y la elipse. En cuanto a la proposición V.26, que también se acompaña de una ilustración, la figura 7, Apolonio sostuvo que «desde un punto cualquiera de la elipse, excepto el vértice del eje menor, solo se puede trazar a este una recta máxima». La demostración de la misma se expresa aquí mediante el lenguaje matemático actual, para facilitar su comprensión en la medida de lo posible:

Sea la elipse ABC de centro H y en ella un punto B. Si desde este punto suponemos que se pueden trazar dos rectas máximas BD

FIG. 5

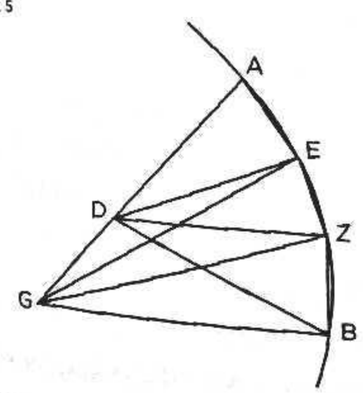



FIG. 6

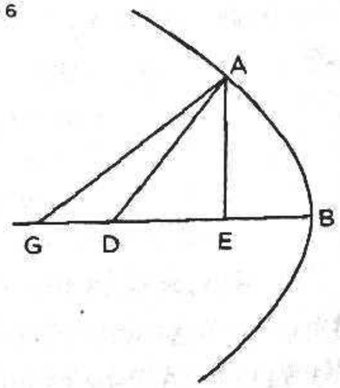
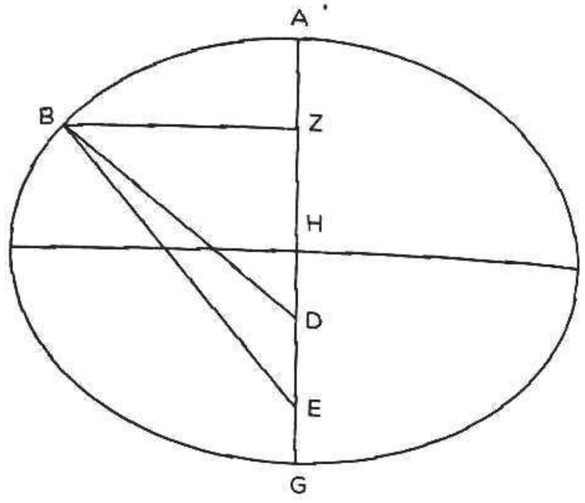


FIG. 7




y BE al eje menor AG y es Z el pie de la perpendicular de B a AG, se tendrían simultáneamente estas dos igualdades incompatibles:

$$\frac{ZH}{ZE} = \frac{\text{diámetro transverso}}{\text{parámetro}}, \quad \frac{ZH}{ZD} = \frac{\text{diámetro transverso}}{\text{parámetro}}$$

Por su parte, la proposición V.27, para la que cabe apoyarse en la figura 8, afirma que «la tangente a una cónica en el extremo de una recta mínima trazada desde un punto del eje, es perpendicular a la mínima».

Sea la parábola AB de eje BG. Si la recta mínima es un segmento del eje, la proposición es evidente, y si es otra recta AG y trazamos la tangente AD en A y la ordenada de A, aplicando las proposiciones III.13 y I.35.

Las proposiciones V.28 y V.29 se pueden resumir en que la hipérbola y la elipse tienen propiedades análogas a la enunciada y demostrada para la parábola.

Por otro lado, la proposición V.30 concluye que la tangente a una elipse en el extremo de una recta máxima trazada desde un punto del eje menor, es perpendicular a la máxima, como se aprecia en la figura 9.



FIG. 8

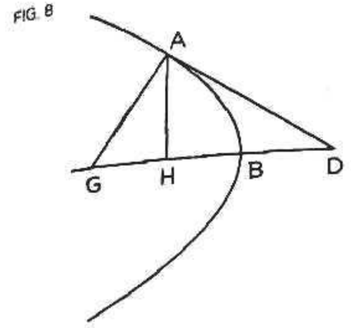
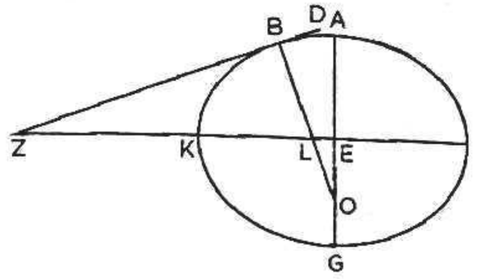



FIG. 9




Sea ABC una elipse de eje menor AC, desde uno de cuyos puntos O trazamos la recta máxima OB y en el extremo B de esta la tangente BD. Puesto que el semieje mayor EK corta a la recta máxima OB en un punto L, el segmento BL de la máxima comprendida entre la curva y el eje mayor, es una mínima, y como BD es tangente, perpendicular a BO.

Como puede observarse a continuación, las proposiciones V.31 y V.32 no son más que las recíprocas de la V.27; y la proposición V.33, la recíproca de la V.30.

- Proposición V.31: La perpendicular en el extremo de una recta mínima es tangente a la sección cónica.
- Proposición V.32: La perpendicular a la tangente a una cónica en el punto de contacto hasta que encuentre al eje, es la menor que se le puede trazar desde el punto de intersección.
- Proposición V.33: La perpendicular en el extremo de una recta máxima es tangente a la cónica.

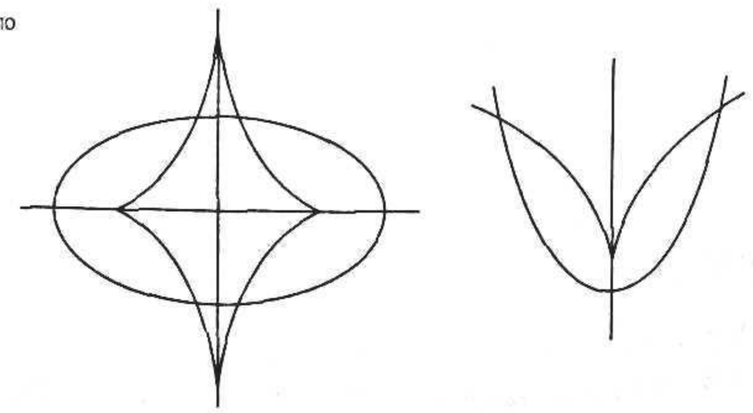
## RECTAS NORMALES A UNA CÓNICA

El Libro V continúa con un desarrollo amplio del tema de las normales a una cónica. Apolonio llegó incluso a dar criterios que permiten decir cuántas normales desde un punto dado se pueden

trazar a una sección cónica; lo que, de alguna forma, equivale a describir las evolutas de las correspondientes cónicas. Expresado de otra manera, Apolonio, en el transcurso de su investigación sobre las rectas máximas y mínimas que pueden trazarse desde un punto a una cónica, determinó las posiciones de los puntos desde los cuales se pueden trazar dos, tres o cuatro rectas de ese tipo. Apolonio fijó para cada tipo de cónica el lugar geométrico de los puntos que separan las regiones desde las que se puede trazar los diversos números de rectas normales. Ese lugar geométrico, que no alcanzó a analizar en profundidad, es lo que ahora se denomina la «evoluta» de la cónica, el lugar geométrico de los puntos de intersección de normales a la cónica «infinitamente próximas».

Por ejemplo, se puede apreciar en la figura 10, desde cualquier punto dentro de la evoluta de la elipse —la curva que se denomina «astroide»— se pueden trazar cuatro normales a la elipse. En cambio, desde los puntos exteriores de la evoluta solamente pueden trazarse dos. También se observa que toda recta tangente a la evoluta es normal a la elipse, es decir, la evoluta es la envolvente de las normales a la elipse. Para la parábola, la evoluta es la curva denominada «parábola semicúbica». Desde cualquier punto del plano que esté por encima de la parábola semicúbica se pueden trazar tres normales a la parábola; y desde cualquier punto del plano que esté por debajo, se pueden trazar solo dos.

FIG. 10





Para el caso de la parábola $y = x^2$, Apolonio demostró que los puntos cuyas coordenadas satisfacen la ecuación cúbica

$$\left(y - \frac{1}{2}\right)^3 = \frac{27}{16}x^2$$

son la posición límite de los puntos de intersección de las normales a la parábola en puntos P y Q, cuando Q se aproxima a P. Es decir, la evoluta se compone de los puntos de esta curva cúbica, que son realmente los centros de curvatura correspondientes a los distintos puntos de la cónica. Esto equivaldría a los centros de los círculos osculadores a la parábola. Para el caso de la parábola general $y^2 = 2px$, la evoluta sería la cúbica de ecuación

$$27py^2 = 8(xp)^3.$$

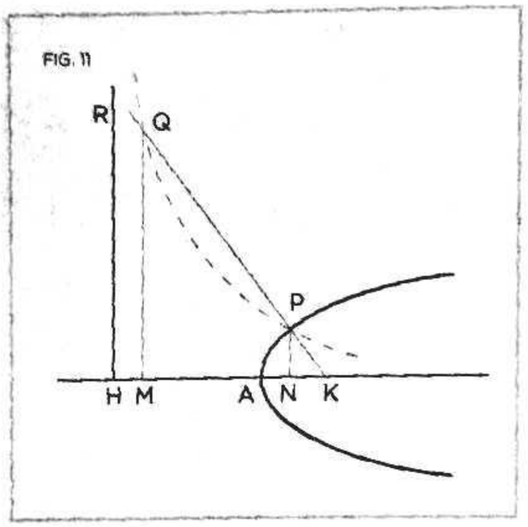
Asimismo, en el caso de la elipse y de la hipérbola cuyas ecuaciones respectivas son:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1, \quad \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$$

se tiene que las correspondientes ecuaciones de sus evolutas son:

$$(ax)^{2/3} + (by)^{2/3} = \left(a^2 - b^2\right)^{2/3}, \quad (ax)^{2/3} - (by)^{2/3} = \left(a^2 - b^2\right)^{2/3}.$$

Las proposiciones siguientes del Libro V tratan de las intersecciones de las rectas máximas y mínimas con las secciones cónicas y del trazado de normales. En particular, sobresalen las complejas proposiciones V.51 y V.52, que demuestran que los pies de las normales que pasan por un punto fijo permanecen en la llamada «hipérbola de Apolonio», cuya intersección con la sección cónica resuelve el problema de trazar a la misma una normal desde un punto dado. Una aproximación moderna para el caso de la parábola sería la siguiente. Sea la parábola $y^2 = 2px$, así como Q un punto exterior a la parábola, que no esté sobre el eje, desde el que se quiere trazar una normal a la misma. Trácese la perpendicular QM al eje AK, y tómese en sentido opuesto a la parábola HM = p. Levántese la perpendicular




HR a HA, y a continuación trácese la hipérbola equilátera que tiene por asíntotas las rectas HA y HR, que corta a la parábola en el punto P. Resulta entonces, como muestra la figura 11, que la recta QP es la normal buscada, como se demuestra al comprobar que NK = HM = p. Si el punto Q estuviera situado en el interior de la parábola, la construcción se resolvería de forma similar, pero el punto P se hallaría entre los puntos Q y R. Apolonio también hizo construcciones análogas para el trazado de una normal, desde un punto dado a la elipse y una hipérbola dadas, para lo que usó una hipérbola auxiliar. Hoy se diría que sus demostraciones son largas, difíciles y poco elegantes, por lo que se recurre a métodos más modernos. En la notación actual, si la cónica viene descrita por cualquiera de las ecuaciones siguientes:

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1,\ \frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1,\ y^2=2px,$$

y el punto es

$$P=(m,n),$$

la hipérbola de Apolonio será:

$$\left(a^2-b^2\right)xy-a^2my+b^2nx=0,\ \left(a^2+b^2\right)xy-a^2my+b^2nx=0,$$
$$xy-(m+p)y-pn=0.$$

Y en el caso de la parábola, los pies de las normales están también en la circunferencia:

$$x^2+y^2-(m+p)x-\frac{py}{2}=0,$$

asunto que no fue advertido por Apolonio, lo que le obligó a resolver como lugar sólido un problema que tiene solución como lugar

Detalle de una estatua erigida en honor del geómetra griego Apolonio de Perga en los jardines del Palacio de Versalles, en París.

plano. Esta cuestión suscitaría una crítica posterior por parte de Pappus de Alejandría. Mientras que el trazado de la tangente a una cónica es un «problema plano», es decir, para resolverlo basta utilizar la intersección de rectas y circunferencias, el trazado de la normal a una cónica con centro desde un punto cualquiera es un «problema sólido»: resulta imposible resolverlo utilizando solo rectas y circunferencias. Sí lo es mediante lugares geométricos sólidos —en este caso, una hipérbola—.

## ALGUNOS ASPECTOS DEL LIBRO VI

El Libro VI de *Las cónicas*, con 33 proposiciones y 10 definiciones, se ocupa principalmente de la igualdad y semejanza de las secciones cónicas y sus segmentos. La semejanza y la homotecia de las curvas de segundo orden no era materia totalmente novedosa. Las definiciones más importantes del libro son las dos primeras.

— Definición 1: Dos secciones cónicas se dicen iguales cuando se pueden aplicar una a la otra en toda su extensión y no se corten.
— Definición 2: Dos secciones cónicas se dicen semejantes cuando al trazar a distancias proporcionales del vértice el mismo número de ordenadas, estas son proporcionales a las abscisas correspondientes

En cuanto a las proposiciones, destacan la VI.1 y la VI.2:

— Proposición VI.1: Dos parábolas son iguales si y solo si lo son sus parámetros.
— Proposición VI.2: Dos hipérbolas o dos elipses son iguales si y solo si las figuras construidas sobre sus ejes transversos son equivalentes y semejantes.

De las restantes, cabe mencionar las siguientes:



— Proposición VI.11: Todas las parábolas son semejantes entre sí.
— Proposición VI.14: Una parábola no puede ser semejante a una hipérbola o a una elipse.
— Proposición VI.15: Una hipérbola no puede ser semejante a una elipse.
— Proposición VI.24: Ninguna parte de una parábola puede ser semejante a una parte de una hipérbola o de una elipse.
— Proposición VI.25: Ninguna parte de cualquiera de las tres cónicas es un arco de círculo.
— Proposición VI.26: Las hipérbolas producidas al cortar las dos hojas de un cono por planos paralelos son semejantes y desiguales.
— Proposición VI.27: Las elipses producidas al cortar un cono por dos planos paralelos que encuentren a los lados del triángulo según el eje y que no sean paralelos ni antiparalelos a la base son semejantes y desiguales.

En lo relativo a las proposiciones finales, que abarcan desde la V.28 a la V.33, constituyen el paradigma de la elegancia geométrica de Apolonio en modelos tridimensionales.

## EL LIBRO VII Y ÚLTIMO

El Libro VII de *Las cónicas*, con 51 proposiciones, expone la teoría de los diámetros conjugados y las figuras construidas sobre ellos. De hecho, algunas de sus proposiciones más importantes se pueden encontrar en los textos modernos sobre cónicas, dos milenios después de que fueran planteadas por Apolonio. Tales son las proposiciones 12, 13, 29, 30 y 31. También se debe resaltar la trascendencia de las proposiciones VII.12 y VII.13, llamadas «teoremas de Apolonio», de las que se puede hacer la siguiente síntesis:

> En toda elipse la suma, y en toda hipérbola la diferencia de dos cuadrados construidos sobre dos diámetros conjugados

cualesquiera, es igual a la suma o diferencia, respectivamente, de los cuadrados construidos sobre los ejes.

Aunque Apolonio descubrió otras muchas relaciones geométricas, estas dos proposiciones han pasado a los anales de la historia de la matemática y se conocen como «teoremas de Apolonio». Las proposiciones VII.29 y VII.30, por su parte, prueban que la diferencia —en la VII.30, «suma»— entre el cuadrado de un diámetro cualquiera de una hipérbola —en la VII.30, «elipse»— y la figura construida sobre él —es decir, la figura rectangular característica cuya base es un diámetro y cuya altura es el parámetro correspondiente a este diámetro— es constante. Por último, destaca la importancia de la proposición VII.31, que concluye que:

> El paralelogramo construido sobre dos diámetros conjugados de una elipse o de las ramas opuestas de dos hipérbolas conjugadas es equivalente al rectángulo construido sobre los ejes.

Este teorema, complementario de las proposiciones VII.12 y VII. 13, demuestra la invariancia del rectángulo construido sobre un par de diámetros conjugados de una elipse o de una hipérbola. Y lo hace con un ingenio que, más adelante, el físico y matemático francés Blaise Pascal (1623-1622) lo definiría como «una miscelánea del espíritu de geometría y del espíritu de finura».





# Otras obras matemáticas de Apolonio

Apolonio compuso otras obras matemáticas además de *Las cónicas* y de *Secciones en una razón dada*, las únicas que se conservan en su integridad. Aunque la mayoría se extravió, de algunas de ellas se tiene noticia o se dispone de fragmentos gracias a Pappus de Alejandría. A estos trabajos geométricos se suman diversas obras de aritmética, óptica y astronomía que, reseñadas por otros autores, magnifican aún más el legado del «gran geómetra».

El prestigio de la obra cumbre de Apolonio, *Las cónicas*, suele eclipsar el hecho de que el genio de Perga fue autor también de otros muchos tratados matemáticos que constituyeron —y en algunos casos constituyen— bellos modelos de análisis geométrico. Por desgracia, solo se conocen unos pocos y, además, de forma fragmentaria. Se encuentran en los sumarios del libro VII de la *Colección matemática*, de Pappus de Alejandría. Dicho libro se abre con el denominado *Tesoro del análisis*, donde, entre otras cuestiones, se incluyen los títulos de seis de los más importantes trabajos de Apolonio: *Secciones en una razón dada*; *Secciones en un área dada*; *Secciones determinadas*; *Las tangencias* —también conocido como *Los contactos*—; los *Lugares planos* y *De las inclinaciones*. Al respecto, Pappus escribió lo siguiente:

> El campo del análisis es la materia particular de la que disponen los que después de haber adquirido los conocimientos elementales quieran prepararse para resolver los problemas que les son propuestos sobre curvas superiores. Es siguiendo el camino del análisis y de la síntesis que esta materia ha sido tratada por tres hombres: Euclides, el autor de los *Elementos*, Apolonio de Perga y Aristeo el Viejo.

El *Tesoro del análisis* está constituido, como señaló Pappus, por obras perdidas de Euclides y Aristeo el Viejo, pero fundamen-

talmente por los trabajos de Apolonio, igualmente perdidos o conservados de forma parcial. No obstante, las descripciones aportadas por Pappus permiten obtener una idea relativamente aproximada de su contenido y evidencian que a lo largo de sus páginas se incluía abundante material geométrico, cuyo estudio forma parte de la actual geometría analítica. Esto explica que durante los siglos XVI y XVII se desatara entre los matemáticos una auténtica obsesión, casi una «moda», por lo que podría definirse como un juego intelectual de altos vuelos: la reconstrucción geométrica de las obras perdidas de Apolonio. Entre todos los que se aventuraron a resolverlo destacó, sin desmerecer al resto, el matemático francés Pierre de Fermat (1607-1665). Precisamente, en esta labor estuvo el origen de la futura geometría analítica.

Según Pappus, se debe a Apolonio la codificación clásica de los problemas geométricos en «planos, sólidos y lineales», según sean resolubles, respectivamente, con rectas y circunferencias, cónicas u otras curvas superiores —como la concoide de Nicomedes, la espiral de Arquímedes, la cisoide de Diocles, la cuadratriz de Hipias y de Dinostrato, etcétera—. Su propósito principal era ajustar la envergadura de los instrumentos geométricos a utilizar con la dificultad de los problemas geométricos a resolver.

«Los primeros inventores de la geometría analítica tenían a su disposición todo el álgebra renacentista, mientras que Apolonio tuvo que trabajar con las herramientas del álgebra geométrica, mucho más rigurosa pero a la vez mucho más incómoda de manejar.»

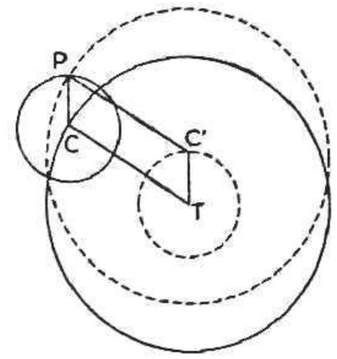
— **Carl Boyer.**

Otros autores también aportaron pistas sobre varios trabajos perdidos de Apolonio, que a falta de mayor información se conocen como *El tornillo*, *Sobre la comparación del dodecaedro y el icosaedro inscritos en una esfera*, *Cantidades irracionales inordenadas*, *Sobre la multiplicación* y el *Ocytocion*. A ellos cabe añadir un resumen de los *Elementos* de Euclides, del que se tiene noticia por Marinus, un matemático y filósofo griego del siglo v. Al parecer,



## TRABAJOS PERDIDOS DE ÓPTICA Y ASTRONOMÍA

Algunas referencias apuntan a que Apolonio compuso dos obras de óptica en las que aplicó los recursos de la geometría al estudio de fenómenos naturales. Así, un fragmento de texto escrito en griego relativo a las matemáticas de la Antigüedad le atribuye un tratado sobre la catóptrica —las propiedades de la luz refleja— y otro sobre los espejos ustorios —espejos cóncavos que reflejan los rayos solares y los concentran en un foco, donde se produce un calor capaz de quemar, fundir o volatilizar objetos—. Apolonio se mostró mucho más activo en el terreno de la astronomía, donde diversas fuentes reseñan que se le deben varios artificios matemáticos, ampliamente usados en el mundo antiguo, para interpretar el movimiento de los planetas. Por ejemplo, Claudio Ptolomeo (100-168), en un extenso pasaje de su obra más célebre, el *Almagesto*, le adjudicó la demostración —no tanto el descubrimiento— del procedimiento para representar por epiciclos los fenómenos de las estaciones y las retrogradaciones de los planetas. El asunto fue confirmado por Proclo de Licia en su obra *Bosquejos de las hipótesis astronómicas*, donde mencionó que Ptolomeo había empleado los resultados de Apolonio en el Libro XII del *Almagesto*. En vez de las esferas homocéntricas que había sugerido el matemático platónico Eudoxo, Apolonio describió dos sistemas disyuntivos: uno, a partir de movimientos epicíclicos, y otro, con base en movimientos excéntricos.



**Representación de los sistemas epicíclico y excéntrico descritos por Apolonio.**

**Sistema epicíclico y sistema excéntrico**

En el primer sistema, un planeta P se mueve de manera uniforme y describe una órbita circular menor, llamado «epiciclo», cuyo centro C gira, a su vez y de manera uniforme, sobre una circunferencia de un círculo mayor, con centro en la Tierra T. En el segundo sistema, llamado «excéntrico», el planeta P se mueve de manera uniforme y describe una órbita circular mayor, cuyo centro C' se mueve, a su vez y de manera uniforme, sobre una circunferencia de un círculo menor, con centro en la Tierra T. Cuando se tiene PC = C'T, los dos sistemas geométricos son equivalentes, lo que Apolonio conocía a la perfección. Durante siglos, a partir de la intervención de Ptolomeo, los astrónomos matemáticos prefirieron los esquemas astronómicos de Apolonio de ciclos y epiciclos o círculos excéntricos. En cambio, por mediación de Aristóteles, los astrónomos con una orientación más filosófica se decantaron por la teoría de Eudoxo de las esferas homocéntricas, con la que pretendían obtener una representación global de los movimientos aproximados de los planetas.

Apolonio habría presentado en él la noción de línea como resultado de una percepción sensorial; y la de ángulo, como la contracción en un solo punto de una superficie, o de un sólido bajo una línea, o de una superficie doblada. Por tanto, supuso un primer ensayo de reforma del tratado clásico de Euclides, sobre todo en la parte de definiciones y axiomas, acaso la más descuidada.

Asimismo, hay constancia de que Apolonio también dirigió sus esfuerzos hacia el estudio de la óptica y, en mayor grado, de la astronomía, donde una de sus demostraciones fue empleada durante siglos por los astrónomos matemáticos.

## LOS ESCRITOS SALVADOS POR PAPPUS

Entre los trabajos menos conocidos de Apolonio cabe empezar por el único que ha sobrevivido en su integridad, una vez traducido de una copia árabe al latín por el astrónomo, físico y matemático británico Edmond Halley. Se trata de la obra que Pappus reseñó bajo el título de *Secciones en una razón dada*. Precisamente, esta mención conduciría a Halley a su feliz hallazgo y reconstrucción en el año 1710. El tratado se divide en dos libros que contienen 20 lemas y 184 proposiciones, todas ellas relativas a los numerosos casos presentes para la resolución de un problema que, en resumen, Pappus enunció así:

> Dadas dos rectas y sendos puntos en ellas, trazar por un tercer punto otra recta que corte a las anteriores en segmentos, que medidos sobre ellas desde los respectivos puntos dados, estén en una razón dada.

El problema analítico conduce a la ecuación cuadrática:

$$ax - x^2 = bc.$$

Al comparar la solución de este problema con la proposición III.41 del libro de *Las cónicas* —que demuestra que cuando tres tangentes a una parábola se cortan mutuamente quedan divididas, respectivamente, en la misma razón—, se hace evidente que Apolonio ya se hallaba en condiciones de trazar un número cualquiera de tangentes a la parábola. En consecuencia, podía resolver el problema de construir la parábola por medio de tangentes.

La segunda obra de Apolonio mencionada por Pappus, *Secciones en un área dada*, está perdida. Aun así, Pappus precisó que el tratado se componía de dos libros que encerraban, respectivamente, 48 y 74 proposiciones. Todas ellas se referían a casos particulares del problema que Pappus enunció de la forma siguiente:

> Dadas dos rectas y sendos puntos en ellas, trazar por un tercer punto otra recta que corte a las anteriores en segmentos, que medidos sobre ellas desde los respectivos puntos dados, delimiten un área equivalente a un área dada.

El problema analítico conduce a esta ecuación cuadrática:

$$ax + x^2 = bc.$$

Si se consulta la solución de este problema en las proposiciones III.42 y III.43 del libro de *Las cónicas*, se aprecia de inmediato que permite construir un número cualquiera de tangentes a la elipse y a la hipérbola; y, por tanto, resolver el problema de construir estas dos cónicas por medio de tangentes.

Gracias a la potencia de la herencia cartesiana y fermatiana, es decir, a la geometría analítica, los problemas de estos dos libros se reducen fácilmente a una intersección de cónicas. En cualquier caso, Apolonio aplicó con suma habilidad el álgebra geométrica de los libros II y VI de los *Elementos* de Euclides para, mediante transformaciones geométricas sucesivas, reducir la «ecuación» —valga el anacronismo— a una forma canónica en la que se reconocía alguna de las tres cónicas. De esta manera, se puede imaginar cómo Apolonio, apoyándose en sus extensos conocimientos sobre las curvas cónicas, pudo proceder de un modo tan brillante en la resolución de problemas.

Sobre la tercera obra de Apolonio, titulada *Secciones determinadas*, Pappus indicó que los dos libros de los que constaba reunían 83 proposiciones. Estas fueron precedidas por 27 lemas, en el primer libro, y 24 lemas, en el segundo libro. En un lenguaje

retórico sumamente enrevesado, Apolonio, según la transcripción de Pappus, planteó el siguiente problema, que aquí se escribe en términos modernos:

> Dados cuatro puntos A, B, C y D, sobre la misma recta, hállese un quinto punto P sobre ella, de modo que el rectángulo construido sobre AP y CP esté en una razón dada con el construido sobre BP y DP.

Como en los casos anteriores, el problema es equivalente a la resolución de ecuaciones cuadráticas. Con ellas se tratan todas las variantes que se presentan en los datos, así como las soluciones correspondientes.

## TRATADOS SOBRE TANGENCIAS Y LUGARES PLANOS

Una de las obras perdidas más relevantes de Apolonio trata sobre las tangencias. Según Pappus, este trabajo abarcó dos libros y recibió el título de *Los contactos*, nombre que alude a la concepción de la tangente en la geometría griega. El valor principal de *Los contactos* es que en sus páginas aparece el «problema de los círculos de Apolonio», conocido históricamente como el «problema de Apolonio». El famoso problema trata de las proposiciones en las cuales «dados tres elementos, los cuales pueden ser puntos, líneas rectas o círculos, dados en posición, se trata de trazar un círculo que sea tangente a los tres elementos dados, o que los contenga en el caso de los puntos». Al efectuarse las combinaciones de los tres elementos geométricos —puntos, rectas o circunferencias— resultan diez casos:

1. Dados tres puntos no alineados, construir una circunferencia que los contenga.
2. Dadas tres rectas, construir una circunferencia que sea tangente a las tres rectas.
3. Dados dos puntos y una recta, construir una circunferencia tangente a la recta y que contenga a los dos puntos.
4. Dadas dos rectas y un punto, construir una circunferencia que sea tangente a las dos rectas y que contenga al punto.
5. Dados dos puntos y una circunferencia, construir una circunferencia que contenga a los dos puntos y sea tangente a la circunferencia dada.
6. Dadas dos circunferencias y un punto, construir una circunferencia que contenga al punto y que sea tangente a las dos circunferencias dadas.
7. Dadas dos rectas y una circunferencia, construir una circunferencia que sea tangente a las rectas y a la circunferencia dada.
8. Dadas dos circunferencias y una recta, construir una circunferencia que sea tangente a la recta y a las dos circunferencias dadas.
9. Dadas una circunferencia, una recta y un punto, construir una circunferencia que pase por el punto y sea tangente a la recta y la circunferencia dada.
10. Dadas tres circunferencias, construir una circunferencia que sea tangente a tres circunferencias dadas.

Los dos primeros casos, que son los más sencillos, aparecen en el Libro IV de los *Elementos* de Euclides en relación con la circunferencia circunscrita e inscrita, respectivamente, a un triángulo. El primer caso se desarrolla en la proposición IV.5; el segundo, en la proposición IV.4. Por su parte, los casos 3, 4, 5, 6, 8 y 9 figuran en el Libro I de *Los contactos* de Apolonio, mientras que los casos 7 y 10 se hallan en el Libro II de dicha obra. No se conoce cuáles fueron con exactitud las soluciones de Apolonio, pero se pueden intuir gracias a la información proporcionada por Pappus. Este consignó que la obra se componía de 21 lemas, 60 proposiciones y 11 problemas, de los que el más difícil era el último:

> Construir un círculo que sea tangente a tres círculos dados.

En la actualidad, este último problema se considera casi elemental, dados los instrumentos geométricos de todo tipo que se

poseen para resolverlo. Sin embargo, la reconstrucción de su solución, perdida desde la época de Pappus, estimuló la curiosidad de los más insignes matemáticos. Las dificultades inherentes al problema experimentadas por los geómetras de los siglos XVI, XVII y XVIII sugirió a numerosos eruditos que tal vez Apolonio nunca resolvió el último caso, lo que elevó el asunto a la categoría de desafío intelectual. Entre los científicos que más se implicaron en la búsqueda de la solución cabe citar a los matemáticos franceses François Viète (1540-1603), también conocido como Francisco Vieta, y René Descartes (1596-1650), sin olvidar las contribuciones posteriores del físico y matemático inglés Isaac Newton (1643-1727), del físico y matemático suizo Leonhard Euler (1707-1783) y del matemático francés Jean-Victor Poncelet (1788-1867).

«En matemáticas existe un cierto camino en la búsqueda de la verdad que, según se ha dicho, Platón fue el primero en descubrir. Teón de Alejandría lo llamó análisis.»

— **François Viète.**

Precisamente, Viète fue el primer matemático que propuso una solución, a título de desafío, al geómetra flamenco Adrianus Romanus (1561-1615). Este le transmitió una respuesta que situaba el centro del círculo en el punto de intersección de dos hipérbolas. Viète la estimó insatisfactoria y replicó con otra que, según su criterio, era «más simple y más acorde con el carácter de los antiguos geómetras, los cuales no admitían más que la recta y el círculo en la resolución de lo que llamaban los problemas planos». Dicha solución fue recogida en una obra de notable interés, *Apollonius Gallus* (1600), donde Viète reconstruyó parcialmente el tratado sobre *Los contactos* de Apolonio. A partir de los casos más sencillos, en los que una o más de las tres circunferencias se reducen a puntos o rectas, el matemático francés alcanzó hasta el último caso, el décimo y más difícil: el de las tres circunferencias. Esta construcción se erigió como uno de los más bellos ejercicios geométricos de Viète y suele considerarse como una de sus mayores contribuciones a la matemática.



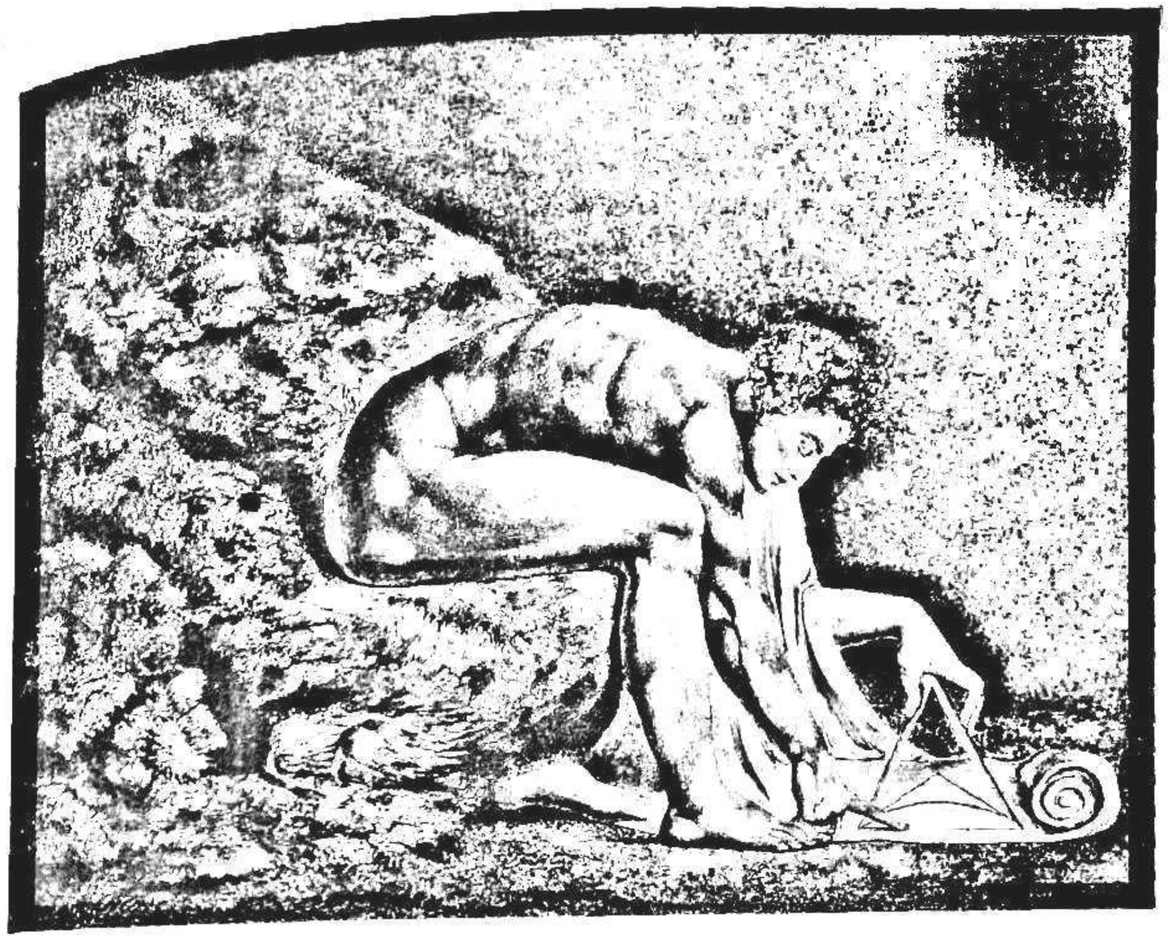


FOTO SUPERIOR:
***Newton* (1795), idealizado al modo de los geómetras griegos por el pintor y grabador inglés William Blake.**

FOTO INFERIOR IZQUIERDA:
**Descartes sacó provecho de los hallazgos de *Las cónicas* y llevó la geometría a un estadio superior.**

FOTO INFERIOR DERECHA:
**La resolución de los problemas de Apolonio implicó a matemáticos tan brillantes como Leonhard Euler.**

Posteriormente, Descartes abordó el problema mediante el análisis algebraico y realizó laboriosos cálculos, que en su mayoría incluyó en la correspondencia que mantuvo con la princesa Isabel de Bohemia y del Palatinado (1618-1680), hija del rey Federico V. Los nuevos estudios indujeron a Descartes a considerar el problema de Apolonio en el espacio y a proponerlo bajo un enunciado general que seguiría las pautas de Fermat. Este, por su parte, dejó soluciones de gran belleza en varias de sus obras, donde llegó a enunciar con estas palabras el problema espacial general:

> Dados cuatro elementos entre puntos, planos y esferas, describir una esfera que pasando por los puntos sea tangente a los planos o a las esferas.

El problema del círculo tangente a tres círculos continuó siendo objeto de multitud de trabajos de cariz algebraico. Uno de ellos, de gran interés y carácter analítico, fue realizado por Isabel de Bohemia, quien lo comunicó a Descartes por vía epistolar. También Isaac Newton, en su *Arithmetica Universalis* o *Aritmética universal* (1707), obtuvo soluciones analíticas de algunos casos del llamado «problema de Apolonio». En principio, estas iban a confluir en las construcciones geométricas que ya habían sido aportadas por Viète, pero Newton, con su reconocida genialidad, obtuvo una solución propia para el caso más general: es decir, el del círculo tangente a tres círculos desiguales. Lo hizo en su obra cumbre, *Philosophiæ naturalis principia matemática* (1687), también conocida como *Principia*, donde simplificó el método de Adrianus Romanus y mostró que el problema de Apolonio es equivalente a encontrar una posición conociendo las diferencias de distancias a tres puntos conocidos. Newton expuso estas conclusiones en el Libro I, sección IV, lema 1.

La cuestión suscitó toda una serie de soluciones analíticas ofrecidas por una pléyade de matemáticos. Además de Guillaume François Antoine, marqués de L'Hôpital (1661-1704), que al efecto consideró diversos tipos de círculos, llegaron soluciones de la mano del británico Thomas Simpson (1710-1761), del italiano Giuseppe Torelli (1721-1781) y de Leonhard Euler.



En otros órdenes, Pappus informó también de que Apolonio había escrito una obra sobre los *Lugares planos* en dos libros que, en su conjunto, reunían 147 teoremas con numerosas figuras y ocho lemas. A juzgar por los claros enunciados de los ocho teoremas del segundo libro conservados por Pappus, la obra de Apolonio debió constituir una valiosa colección de teoremas sobre la recta y el círculo, que en la actualidad corresponderían a las soluciones de ecuaciones de primer y segundo grado. Como se ha mencionado, los dos libros sobre los *Lugares planos* estudiaban lugares geométricos rectilíneos o circulares. Buena parte del primer libro se puede resumir, mediante un lenguaje geométrico moderno, con la siguiente afirmación: la homotecia, la traslación, la rotación, la semejanza y la inversión transforman un «lugar plano en otro lugar plano». Debe reseñarse también que en el segundo libro aparecen dos importantes lugares geométricos:

a) El lugar geométrico de los puntos cuya diferencia de los cuadrados de sus distancias a dos puntos fijos A, B, es constante, es una recta perpendicular al segmento AB.
b) El lugar geométrico de los puntos cuya razón de distancias a dos puntos fijos es constante, es una circunferencia.

## «DE LAS INCLINACIONES»

La *Colección matemática* de Pappus recoge también otra obra de Apolonio dividida en dos libros: *De las inclinaciones*. El tratado contenía toda una serie de proposiciones en las que ciertas rectas inclinadas, es decir, dirigidas hacia un punto dado, son interceptadas sobre una longitud dada entre dos líneas —rectas o arcos de circunferencias— dadas. Según la información aportada por Pappus, *De las inclinaciones* contenía 38 lemas, 125 teoremas y 54 problemas, de los que una cierta cantidad se prestaban a discusión. Pappus de Alejandría hizo gala de su rigor y minuciosidad al reproducir el enunciado completo de varios de ellos. A modo de ejemplo, se puede destacar el siguiente, de carácter muy general:

Insertar un segmento de longitud dada entre dos rectas secantes —o dos arcos de circunferencia, o una recta y un arco de circunferencia— de tal forma que este segmento prolongado pase por un punto dado.

Se sabe que los problemas sobre las secantes en general no admiten solución mediante la geometría elemental. Dado que su estudio analítico remite a ecuaciones de segundo grado, se reconducen a una determinación de puntos que son intersección de secciones cónicas. El problema general de la secante que pasa por un punto dado e intercepta sobre una longitud determinada entre dos líneas rectas o curvas era conocido desde tiempo atrás, en especial por Aristóteles. El sabio griego, sin conocer la aplicación de las secciones cónicas, no pudo obtener más que soluciones mecánicas, es decir, empíricas.

Por otra parte, casi medio siglo antes que Apolonio, Arquímedes aludió en varias ocasiones a casos particulares del problema de la secante, lo que demuestra que la ciencia de su tiempo ya había logrado soluciones. De hecho, Arquímedes las utilizó en las ingeniosas proposiciones preliminares de su tratado *Sobre las espirales*; en la proposición IV del Libro II del tratado *Sobre la esfera y el cilindro*, y en la proposición VIII del *Libro de los lemas*. Ahora bien, estos casos particulares pertenecen a la categoría que Pappus denominó «problemas sólidos», en cuya solución deben intervenir secciones de cuerpos sólidos, es decir, secciones cónicas. Pappus la opuso a otros dos conceptos: a los «problemas planos», donde no se requiere más que la intervención de la regla y el compás, es decir, líneas que tienen su origen primigenio en el plano; y a los «problemas lineales», que exigen la intervención de líneas curvas diferentes a las de segundo grado, es decir, aquellas líneas que tienen su origen en superficies irregulares o de generación cinemática a base de combinación de movimientos, como las concoides, las cisoides, las cuadratrices, las espirales, etcétera.

Se puede concluir, pues, que en esta obra perdida de Apolonio, *De las inclinaciones*, aparecieron problemas «sólidos» y «lineales» y se renovaron las técnicas utilizadas por Arquímedes. Por tanto, el trabajo no fue completamente original, sino que constituyó más bien



una compilación. En ella, Apolonio ordenó los problemas sobre las secantes resueltos con anterioridad, determinó el número de soluciones y las propias condiciones de solubilidad y, por último, enriqueció el conjunto al añadir sus propios descubrimientos. Según un comentario del filósofo neopitagórico Jámblico (245-325) sobre las *Categorías* de Aristóteles, conservado a su vez en los comentarios de Simplicio (490-560) sobre la *Física* de Aristóteles, Apolonio habría hallado una cuadratriz a la que llamó «la hermana de la concoide». Sin embargo, Pappus sostuvo que esta curva era exactamente la «concoide de Nicomedes», utilizada para la resolución de un célebre problema clásico: la «trisección del ángulo». Así pues, Apolonio conoció esta curva de naturaleza trascendente y además, según Pappus, la empleó en la solución de algunos de los problemas que abordó en *De las inclinaciones*. A tenor de lo descrito, se trató de «problemas lineales». En concreto, se sabe que:

> Todos los problemas relativos a la secante pasando por un punto dado, e interceptada sobre una longitud dada entre dos líneas dadas, de las cuales una de ellas es una recta, pueden ser resueltos por una concoide cuyo polo es el punto por donde debe pasar la secante.

Debe señalarse que Apolonio no trató todos los problemas sobre las secantes como si fueran «problemas sólidos», es decir, mediante la intervención necesaria de las secciones cónicas, sino que logró suponer muchos de ellos como «problemas planos» y, por tanto, susceptibles de ser resueltos con regla y compás. Una muestra de ello se aprecia en este problema, cuyo enunciado preservó Pappus:

> Dado un rombo, prolónguese un lado, trácese una recta igual a una longitud dada —interceptada— en el ángulo exterior e inclinada hacia el ángulo opuesto —es decir, pasando por el vértice del ángulo opuesto al ángulo suplementario de este ángulo exterior—.

La solución inspiró numerosas reconstrucciones con diversas variantes, como las ofrecidas por Christiaan Huygens, por el matemático dálmata Marino Ghetaldi (1568-1626) y por el matemático español Antonio Hugo de Omerique (1634-1705).

## OBRAS PERDIDAS Y SIN APENAS REFERENCIAS

De los trabajos de Pappus se desprende que Apolonio fue un autor verdaderamente prolífico y apasionado por el estudio de la geometría, lo cual hace lamentar aún más que tantas creaciones suyas no fueran preservadas. En algunos casos, Pappus, tuvo que limitarse a reflejar la existencia de diversos tratados de Apolonio a través de las escasas referencias que ofrecieron otros autores, así como plasmar sus títulos, ya fueran fidedignos o meras aproximaciones a su contenido. Por tanto, acorde a esta precisión, pueden considerarse como obras perdidas de Apolonio las que se conocen bajo los «títulos» de *El tornillo*, *Sobre la comparación del dodecaedro y el icosaedro inscritos en una esfera*, *Cantidades irracionales inordenadas*, *Sobre la multiplicación*, *Ocytocion* y el resumen de los *Elementos* de Euclides, cuyos rasgos generales ya se han comentado.

El primero de estos trabajos es *El tornillo*. Gémino de Rodas, un astrónomo y matemático griego del siglo I a.C. del que ya se habló anteriormente, citó que Apolonio habría escrito una obra sobre el tornillo de la que se desconoce casi totalmente su contenido. Solo se tienen algunas referencias efectuadas por geómetras posteriores; en particular, de la mano del filósofo neoplatónico Proclo de Licia (412-485), que así lo recogió en sus *Comentarios sobre el primer libro de los Elementos de Euclides*. El propio Pappus también hizo alusión a Apolonio en el tema de la construcción del tornillo, en el curso de una proposición mecánica sobre el mismo que plasmó en el libro VIII de su *Colección matemática*. Por consiguiente, es probable que el escrito de Apolonio citado por Proclo de Licia contuviera una «teoría geométrica de la hélice».

En otros órdenes, Proclo de Licia atribuyó a Pitágoras la construcción de «las figuras cósmicas». Este nombre está relacionado con su uso en la elaboración de una cosmogonía pitagórica que asociaba, respectivamente, los cuatro elementos primarios —fuego, tierra, aire y agua— con los cuatro sólidos —tetraedro, cubo, octaedro e icosaedro—, mientras que el dodecaedro se relacionaba de forma mística con el cosmos, representación del universo armónico ordenado por el número. Precisamente, el dodecaedro y el icosaedro habrían de inspirar otro tratado geométrico perdido



### LAS ALABANZAS DE NEWTON A ANTONIO HUGO DE OMERIQUE

El matemático español Antonio Hugo de Omerique (1634-1705), autor de *Análisis geométrico o Método de resolución de problemas nuevos y verdaderos, así como de Cuestiones aritméticas* (1698), se reveló como un notable hombre de ciencia a finales del siglo XVII, al extremo de que fue ensalzado por Isaac Newton. Su método supo recoger las aportaciones de los geómetras clásicos, como Apolonio de Perga, sin desdeñar las contribuciones más recientes, y se orientó al manejo de las proporciones. Entre otros conceptos, Omerique abordó la construcción de triángulos, la semejanza de las figuras, las «cantidades lineangulares», etcétera. Newton, que publicó posteriormente su *Aritmética universal* (1707), comentó en una de sus cartas que había estudiado a fondo la obra de Omerique y la definió como «juiciosa y de valor», ya que exponía «de la forma más sencilla, el medio de restaurar el análisis de los antiguos, que es más ingenioso y más a propósito para un geómetra que el álgebra de los modernos». Newton no escatimó elogios a este tratado de geometría y añadió en dicha misiva que el método de Omerique «le conduce generalmente a soluciones más sencillas y elegantes que aquellas otras obtenidas por el álgebra». Omerique se desempeñó en su juventud como comerciante naval, pero la piratería arruinó su negocio. Si bien su dedicación a las matemáticas le granjeó ciertos reconocimientos en vida, su situación económica siempre fue precaria y falleció dejando deudas.

**Portada de la primera edición de *Analysis geométrica* (1698), de Antonio Hugo de Omerique.**

de Apolonio, aunque se precisan algunas explicaciones para dar cuenta de qué motivaciones lo inspiraron. No hay que perder de vista que el tratamiento euclídeo de los poliedros regulares resulta esencial para la historia de la matemática, ya que produjo el primer ejemplo de un teorema fundamental de clasificación. Euclides introdujo uno por uno los diversos poliedros regulares en el Libro XI de los *Elementos*. Así, definió el tetraedro (XI.12), el

### EL PESO DE PLATÓN SOBRE LA GEOMETRÍA

Durante siglos, los poliedros regulares se llamaron «cuerpos platónicos» por el relevante papel que jugaron en un célebre diálogo sobre la naturaleza escrito por Platón a mediados del siglo IV a.C.: el *Timeo*. En este diálogo, el más profundamente pitagórico de toda su obra, Platón expuso de forma mística la asociación que presuntamente habría hecho Pitágoras del tetraedro, el cubo, el octaedro y el icosaedro con los cuatro elementos naturales primarios. Si bien un siglo antes el filósofo Empédocles de Agrigento ya había vinculado estos últimos con la constitución de toda la materia, la veneración pitagórica por el dodecaedro condujo a Platón a considerarlo como la quintaesencia: a sus ojos, este sólido, el dodecaedro, era el quinto elemento, la sustancia de los cuerpos celestiales, el símbolo místico del cosmos. Finalmente, tras el riguroso estudio euclídeo de los poliedros regulares o «cuerpos platónicos», la época de Apolonio favoreció que quedaran liberados en parte del carácter místico que les había atribuido la filosofía platónica y alcanzaran, por fin, un carácter más realista.

Estatua de Platón, con la diosa Atenea al fondo, en la entrada de la Academia de Atenas.

cubo (XI.25), el octaedro (XI.26), el icosaedro (XI.27) y el dodecaedro (XI.28). El objeto de los teoremas del Libro XIII fue inscribir cada uno de ellos en una esfera, lo que obtuvo de forma sucesiva en las proposiciones 13 a 17, donde halló la razón de la arista del sólido al diámetro de la esfera circunscrita. El Libro XIII, y con él toda la obra de Euclides, hallan su clímax final en la última proposición:

> Construir los cinco poliedros regulares inscritos en la misma esfera y comparar las aristas de las cinco figuras.

Sin embargo, el conocimiento de las propiedades comparativas recíprocas de los poliedros quedó bastante incompleto en el



estudio de Euclides, pese a su brillantez y carácter exhaustivo. Ello debió inspirar a Apolonio su tratado *Sobre la comparación del dodecaedro y el icosaedro inscritos en una esfera*, del que solo consta un pasaje, recogido por Hipsicles de Alejandría, un astrónomo y matemático que vivió en el siglo II a.C., en una de sus obras:

> La circunferencia circunscrita al pentágono regular del dodecaedro y la circunscrita al triángulo equilátero del icosaedro, ambos inscritos en la misma esfera, es la misma.

Hipsicles afirmó que este hallazgo había sido descrito, de una parte, «por Aristeo, en su obra sobre la comparación de las cinco figuras» —en referencia a los poliedros—, y de otra parte, «por Apolonio, en su segunda publicación relativa a la comparación del dodecaedro con el icosaedro». En este sentido, llama la atención que en el apócrifo Libro XIV de los *Elementos* de Euclides, que precisamente se atribuye a Hipsicles, aparezcan estos resultados:

> La razón de la superficie del dodecaedro al icosaedro es la misma que la del dodecaedro al icosaedro [es decir, a su volumen], porque la perpendicular, trazada desde el centro de la esfera sobre el pentágono del dodecaedro, es la misma que la trazada desde el centro de la esfera sobre el triángulo del icosaedro.

En definitiva, se puede concluir que tanto *Sobre la comparación del dodecaedro y el icosaedro inscritos en una esfera* como *El tornillo* son dos obras irremisiblemente perdidas de Apolonio, puesto que Pappus solo pudo plasmar las escasas citas y menciones que hicieron otros autores anteriores.

## INTERÉS POR LA ARITMÉTICA

Lo mismo se puede decir de *Cantidades irracionales inordenadas*, de la que también se tiene constancia por Proclo de Licia. Este informó que Apolonio había escrito sobre «cantidades irracionales

inordenadas» y aseguró que las mismas eran «muy cultivadas por el gran matemático». De estos escritos relativos a las magnitudes inconmensurables no se supo nada hasta 1853, cuando el matemático y orientalista alemán Franz Woepcke (1826-1864) tradujo una versión en árabe de un comentario de Pappus sobre el Libro X de los *Elementos*. El documento de Woepcke es impreciso, pero indica que Apolonio distinguía las especies de irracionales ordenados y «descubrió la ciencia de las cantidades llamadas irracionales inordenadas, que produjo un gran número de métodos exactos».

Es probable que al tratar las cantidades irracionales Apolonio no abandonara aún la expresión geométrica de las propiedades numéricas, para así considerar el número en su absoluta pureza. Sin embargo, se aplicó de forma eficaz a la aritmética práctica, llamada por los griegos «logística» y de uso habitual en el comercio y los oficios artesanales. La importancia que dio Pappus a este trabajo hace suponer que, al extender la numeración de los griegos, limitada a la miríada cuadrada, Apolonio tuvo en cuestiones de aritmética una autoridad próxima a la de Euclides en geometría. De hecho, fijó de forma definitiva la numeración de los números elevados, inaugurada por Arquímedes en su obra *Arenario*.

Se puede afirmar que *Cantidades irracionales inordenadas* no fue la única obra de Apolonio que se adentró en el terreno aritmético. Sus inquietudes matemáticas no descansaron exclusivamente sobre la geometría y compuso otras dos obras en las que profundizó en la aritmética. La primera de ellas es *Sobre la multiplicación*, de la que se conserva una parte ínfima. Se trata del análisis que Pappus realizó sobre la misma, que ocupa un fragmento del Libro II de su *Colección matemática* y recoge 12 de los 26 teoremas del nuevo método de Apolonio para la multiplicación de los grandes números. El método se apoyaba sobre dos teoremas principales, ajustando, de una parte, la multiplicación de las unidades, de las decenas y de las centenas entre ellas; y de otra parte, la multiplicación de un número por decenas, centenas y millares de miríadas de orden cualquiera. Pappus reprodujo los cálculos de una recreación matemática con la que Apolonio ejemplificó su método y proponía hallar el «número inmenso» obtenido al multiplicar el conjunto de las 38 letras de un verso griego, tomadas por su valor numérico.



La segunda de ellas es el *Ocytocion*, un tratado de cálculo rápido que fue mencionado por Eutocio de Ascalón en su comentario a *Sobre la medida del círculo*, de Arquímedes. En dicho comentario, Eutocio hizo referencia a ciertos trabajos aritméticos de Apolonio respecto a algunas consideraciones generales sobre la relación de la circunferencia con el diámetro:

> Apolonio de Perga también demostró esto por medio de otros números dando lugar a una aproximación más grande en el *Ocytocion*.

Eutocio recalcó que la medida dada por Apolonio era más rigurosa que la de Arquímedes, cuya aproximación no respondía a los usos de la vida cotidiana. De ello se deduce que Apolonio escribió una obra titulada *Ocytocion* en la que aplicó un nuevo método para calcular, mediante números muy grandes y operaciones muy perfeccionadas, una determinación de la relación entre la circunferencia y el diámetro. Arquímedes había sido el primero en computarla; pero Apolonio, con su método, habría obtenido un valor mucho más aproximado.

Como cierre de este capítulo se puede concluir, en definitiva, que la pérdida de la mayor parte de las obras de Apolonio no menoscaba un ápice la grandeza de su legado matemático, poco menos que abrumador. Ni siquiera el hecho de que la restitución de otras tantas obras suyas solo se haya producido de forma parcial resta méritos a su obra. Si se suma la diversidad y calidad de sus trabajos a las capacidades científicas que demostró, se le añade el carácter certero e innovador de sus hallazgos y se multiplica todo por su extraordinaria contribución a la geometría, da igual que se resten las obras perdidas o que permanezcan algunas incógnitas, puesto que la ecuación queda más que despejada: Apolonio de Perga no solo fue uno de los más grandes matemáticos de la Antigüedad, sino de la historia completa de la matemática.

CAPÍTULO 5

# Un legado que continúa presente en las ciencias y el arte

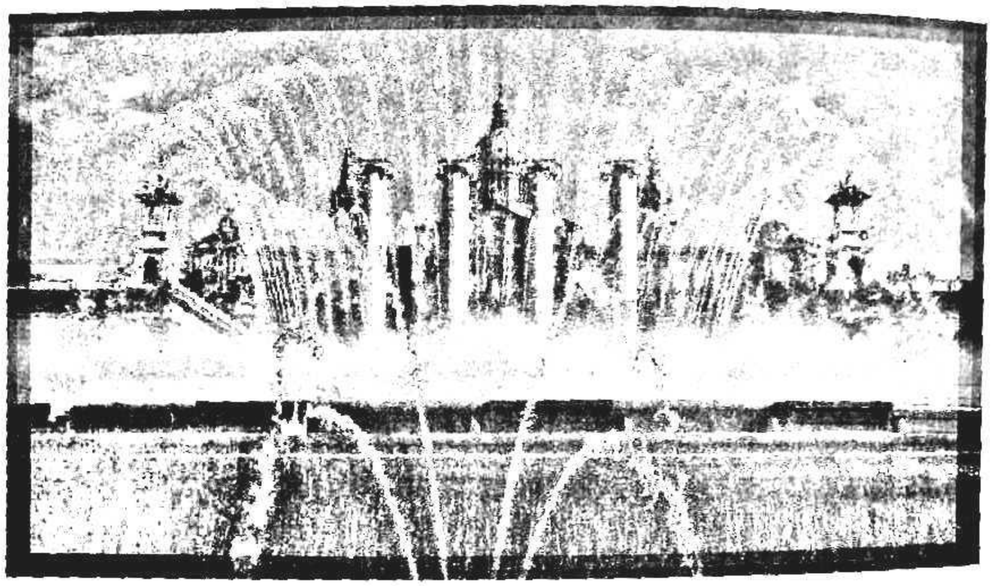
Los hallazgos obtenidos por Apolonio en su investigación matemática enriquecieron la geometría, una ciencia que sería perfeccionada por Descartes, Fermat, Newton y otros grandes estudiosos de su obra. El dominio de las secciones cónicas abrió un horizonte de posibilidades que inspiró notables obras de arte y aún impregna la arquitectura actual. Además, propició aplicaciones prácticas de carácter científico, como las antenas parabólicas y los satélites.

Uno de los aspectos más fundamentales de la obra de Apolonio es, sin duda, la influencia que ejerció sobre Pierre de Fermat y René Descartes en la aparición de la geometría analítica. El tema posee una enorme amplitud, pero se concretará en dos aspectos básicos: por un lado, su incidencia sobre la geometría analítica de Fermat, a propósito de la reconstrucción por parte de este matemático de los *Lugares planos* de Apolonio; y por otro, la trascendencia del llamado «problema de Pappus» como piedra de toque de la geometría analítica de Descartes. El problema de Pappus tuvo su origen en Euclides, pero su verdadero desarrollo llegó de la mano de Apolonio y del propio Pappus de Alejandría.

El legado de Apolonio, además, sobrepasó el ámbito estricto de la geometría para alcanzar a diversas aplicaciones prácticas de signo científico con un gran peso en la actualidad: por ejemplo, las antenas parabólicas, los satélites geoestacionarios o geosíncronos, los hornos y centrales eléctricas solares, etcétera. Asimismo, ha impregnado también las artes, con especial predicamento en la arquitectura, donde resultó clave en la construcción de obras tan célebres como el Coliseo y el panteón de Agripa de Roma, la plaza de San Pedro del Vaticano, la Sagrada Familia de Barcelona y la torre Eiffel de París, sin desdeñar edificaciones más recientes en el tiempo y con un acusado criterio vanguardista, como la catedral de Brasilia, el puente hiperbólico de Manchester y la casa danzante de Praga.

### LAS SECCIONES CÓNICAS EN LA VIDA COTIDIANA

Las secciones cónicas están muy presentes en la vida cotidiana. Como es natural, la circunferencia resulta la más frecuente. Sin embargo, al mirar los cuerpos en perspectiva, los objetos circulares se ven como si fueran elipses. Así, por ejemplo, si se inclina un vaso de agua, la capa superior tendrá la forma de elipse, al igual que cuando se corta un pedazo cilíndrico de embutido con el cuchillo inclinado, las rodajas tienen forma de elipse. También los envases de algunas latas de conservas son elipses, así como los marcos de ciertos cuadros, espejos y otros muchos elementos domésticos. En la calle, numerosos mensajes publicitarios, logotipos y señales son elípticos. Con una linterna se pueden obtener cónicas como la elipse o la hipérbola, y una lámpara con pantalla en forma de cilindro o tronco de cono proyectará sobre la pared un recinto iluminado con forma de hipérbola, que puede cambiar a elipse o parábola según varíe la inclinación del eje de la lámpara. Si se lanza una pelota, inicialmente va hacia arriba y hacia delante, después cae sin dejar de avanzar, y forma así un camino con forma de parábola invertida. Casi todos los movimientos de las pruebas de atletismo se reducen a parábolas: las que efectúan el lanzador, el saltador de longitud y sobre todo el corredor: cada paso que da, es una parábola. Los ejemplos no acaban aquí, pues el agua del mar en su recorrido dibuja parábolas, al igual que los surtidores de agua de algunas fuentes espectaculares de los parques, que diseñan hermosas parábolas que crecen y decrecen a tenor de la fuerza con que sale el fluido.



Al igual que otras fuentes monumentales, los chorros de agua de la fuente mágica de Montjuïc, en Barcelona, realizan un vistoso despliegue geométrico en el que predominan las parábolas.



*Por todo ello, se puede afirmar que los logros de Apolonio no solo continúan presentes, sino que proliferan y se han perfeccionado a extremos asombrosos. De hecho, como se ha mencionado, se hallan incluso en el espacio, donde los satélites geoestacionarios obedecen a algunos de los fundamentos que el «gran geómetra» abordó en la Antigüedad clásica, por no hablar de la omnipresencia de las secciones cónicas en la vida cotidiana. En definitiva, Apolonio y* ***Las cónicas*** *constituyen, por derecho propio, un capítulo fundamental en la historia de la matemática, lo que se acentuó después de las contribuciones que realizaron Fermat y Descartes, dos de los más grandes continuadores de su investigación.*

## APOLONIO Y LA GEOMETRÍA ANALÍTICA DE FERMAT

En el siglo XVII, Fermat estudió meticulosamente las obras de Diofanto —de donde provinieron sus aportaciones al nacimiento y desarrollo de la teoría de números— y los tratados de Pappus y Apolonio, que junto a los de Viète le inspiraron la creación de una geometría analítica. Fermat los conectó con los trabajos de Arquímedes y alumbró numerosos métodos y artificios infinitesimales. Fascinado por los intentos de Viète y Ghethaldi de reconstruir ciertas obras perdidas de Apolonio, reconstruyó a su vez los dos libros de los *Lugares planos* y estudió el célebre «problema de Apolonio» de los círculos tangentes a tres círculos y su generalización al espacio: «las esferas tangentes a cuatro esferas».

Por otro lado, Descartes publicó en 1637 la *Geometría* junto con la *Dióptrica* y los *Meteoros* como apéndices de su *Discurso del método*, o este como prólogo de aquellos opúsculos. El mismo año, Fermat informó a sus colegas parisinos de sus investigaciones a propósito de la reconstrucción de los *Lugares Planos* de Apolonio. Estas fueron plasmadas en la memoria *Introducción a los lugares planos y sólidos —Ad locos planos et solidos isagoge—*, publicada en 1679 por su hijo dentro de las *Varia Opera Mathematica*. Las obras citadas de Descartes y Fermat contienen los fundamentos de la futura geometría analítica.

Fermat observó que el punto débil de los métodos geométricos de los griegos —patente, por ejemplo, en el método de exhaución en relación a las cuadraturas— radicaba en que se trataban de métodos de demostración, no de descubrimiento. Al no ser generales ni heurísticos, exigían conocer previamente la solución del problema para obtener una demostración rigurosa. Fermat dio muy pocas indicaciones sobre la transición desde Viète a su geometría analítica, pero su motivación esencial pudo ser hallar nuevos métodos más simples, operativos y, sobre todo, más generales, para el descubrimiento de las propias soluciones.

«Apolonio había escrito sobre los lugares planos y Aristeo sobre los lugares sólidos, pero si no nos engañamos, la investigación sobre los lugares no les resultaba nada fácil; lo que conjeturamos en base al hecho de que para un gran número de lugares fracasaron en establecer el problema de manera general.»

– Pierre de Fermat.

Así pareció pronunciarse en *Ad locos planos et solidos isagoge*, donde estableció un principio fundamental de la geometría analítica: «la naturaleza y la construcción de las curvas planas están determinadas por la ecuación canónica asociada». Además, introdujo la idea fundamental de variable algebraica, básica para el desarrollo del cálculo, y sintetizó uno de los principios más importantes de la historia de la matemática con estas palabras:

> Siempre que en una ecuación final se encuentran dos cantidades incógnitas, se tiene un lugar geométrico, describiendo el extremo de una de ellas una línea recta o curva. La línea recta es simple y única en su género; las especies de curvas son en número infinito, círculo, parábola, elipse, etcétera.

Fermat dio un significado a una ecuación algebraica en dos incógnitas. De estas, concebidas en todo momento como segmentos, la primera se mide, a partir de un punto inicial, a lo largo de un eje dado, mientras los segmentos correspondientes que representan la otra incógnita, determinados por la ecuación dada, se levantan como ordenadas formando un determinado ángulo con el eje. En *Las cónicas*, ciertas «líneas de referencia» —diámetros conjugados o diámetro-tangente— que jugaban un papel de coordenadas se asociaban a una curva dada de modo que, a través del álgebra retórica, se expresaban en función de esas líneas. Pero la curva como ente geométrico se consideraba *a priori*; y sobre ella, a partir de su particular estructura geométrica intrínseca, se superponían, *a posteriori*, las líneas coordenadas, de cuya relación, descrita verbalmente, resultaba la «ecuación retórica» de la curva. Fermat invirtió la situación: a partir de una ecuación algebraica en dos incógnitas, ilustró cómo esta ecuación define, con respecto a un sistema de coordenadas dado, un lugar geométrico de puntos, es decir, una curva.

No se debe atribuir a Fermat el uso pionero de las coordenadas. El razonamiento analítico y la aplicación del álgebra a la geometría eran comunes en la época. Lo que sí es nuevo a partir de Fermat y Descartes es la constatación de que una ecuación algebraica en dos incógnitas representa, por sí misma, una curva geométrica determinada unívocamente. Se debe matizar también que ninguno de ellos habló de un«sistema de coordenadas» o de la idea de los dos ejes —abscisas y ordenadas—. Fermat escogió a conveniencia una línea recta que juega el papel del eje x. En realidad, una semirrecta cuyo origen es un punto fijo que hace las veces de lo que después se llamaría «origen de coordenadas». Así pues, la geometría desarrollada bajo estos presupuestos será una «geometría de ordenadas» más que una «geometría de coordenadas». Además, al considerar las coordenadas como segmentos, Fermat restringió las operaciones a lo que ahora se llama el primer cuadrante. Luego realizó la clásica división de los lugares en tres tipos —planos, sólidos y lineales—, a lo que sigue el resultado de que si las potencias de los términos en una ecuación dada no supera el cuadrado, entonces el lugar es plano o sólido:

> Es cómodo, para establecer las ecuaciones, tomar las dos cantidades desconocidas bajo un ángulo dado, que de ordinario supondremos recto, y dar la posición y un extremo de una de ellas; siempre que

ninguna de las dos cantidades desconocidas sobrepase el cuadrado, el lugar será plano o sólido.

He aquí el tema central del trabajo de Fermat: tomar coordenadas y justificar el resultado a base de considerar casos de ecuaciones de grados progresivos. Fermat comenzó con la ecuación de primer grado que, según la terminología de Viète, expresó en la forma «*D in A aequetur B in E*», es decir, $dx = by$, y demostró que el lugar geométrico en este caso resulta ser una recta —semirrecta—. Luego, abordó las ecuaciones de segundo grado, mostrando en primer lugar que «*A in E aeq. Z pl.*», es decir, $xy = c^2$, es una hipérbola; y que toda ecuación de la forma $d^2 = xy = rx = sy$ se puede reducir fácilmente a la ecuación previa anterior de la hipérbola equilátera, mediante sustituciones que son equivalentes a traslaciones de ejes. También demostró que $x^2 = dy$ y también $y^2 = dx$, así como la forma general $b^2 \pm x^2 = dy$, son parábolas.

Al llegar a este punto, sentenció que «gracias a este procedimiento hemos construido todas las proposiciones del segundo libro de Apolonio sobre los *Lugares planos*». Prosiguió con la demostración de que $b^2 - x^2 = ky^2$ es una elipse y que $b^2 + x^2 = ky^2$ es una hipérbola, de la que dio las dos ramas. La geometría analítica de Fermat demostró así su potencia como instrumento sistemático de ataque de los problemas de lugares geométricos.

## DESCARTES Y EL PROBLEMA DE PAPPUS

El propio Apolonio comentó en *Las cónicas* la importancia de la regla para construir «el lugar de tres y cuatro líneas», es decir, el problema de Pappus, llamado en su enunciado más sencillo «lugar de tres o cuatro rectas». Esta fue una de las cuestiones más importantes de toda la geometría griega y solamente Euclides pudo darla, pero en un caso particular: la solución completa habría exigido conocer los teoremas descubiertos por Apolonio. Descartes, que se valió del álgebra como instrumento algorítmico para elaborar un poderoso método analítico-sintético para abordar los problemas geométricos, se propuso rehacer la geometría griega y abordó el «problema de Pappus de las tres o cuatro rectas» que, siendo generalizado a $2n-1$, $2n$ rectas, campea a lo largo de una de sus mejores obras: la *Geometría*.

El matemático francés lamentó que la aparición de las magnitudes inconmensurables impidiera a los geómetras griegos asignar a las figuras geométricas números que midieran sus longitudes, áreas y volúmenes, lo que les obligó a calcular directamente con las figuras, que se trataban como magnitudes. Así se hacía en los *Elementos*, donde los números se sustituían por segmentos de recta y las operaciones entre ellos se llevaban a cabo mediante construcciones geométricas. En la geometría griega, los segmentos rectilíneos no tenían longitud. Por ello, las «operaciones» con los segmentos daban rectángulos y paralelepípedos, objetos de naturaleza estrictamente geométrica e imposibles de confundir con el producto de las longitudes de sus lados. El sentido aritmético de las operaciones estuvo ausente hasta la irrupción de Diofanto.

La gran innovación de Descartes, por tanto, fue asignar una longitud a los segmentos, lo que permitió su manipulación algebraica operacional. Así, no tuvo ningún prejuicio para hablar en el problema de Pappus del «producto de cuatro líneas rectas, de cinco o de más» y escribir su propio enunciado de un problema que «Euclides había empezado a resolver y que Apolonio había proseguido sin que nadie lo hubiera terminado»:

> Dadas tres, cuatro o más rectas, se trata de encontrar un punto del que se puedan trazar otras tantas líneas rectas, una sobre cada una de las dadas, y haciendo con ellas ángulos dados, y que el rectángulo formado por dos de esas así trazadas desde el punto, tenga una proporción dada con el cuadrado de la tercera, si no hay más que tres; o bien con el rectángulo de las otras dos, si hubiera cuatro; o bien si hay cinco que el paralelepípedo compuesto por tres tenga la proporción dada con el paralelepípedo formado por las dos que restan y por otra línea dada. Y así este problema se puede extender a todo número de líneas.

Al cabo, precisó que siempre había una «infinidad de diversos puntos que pueden satisfacer lo que aquí se pide», por lo que se

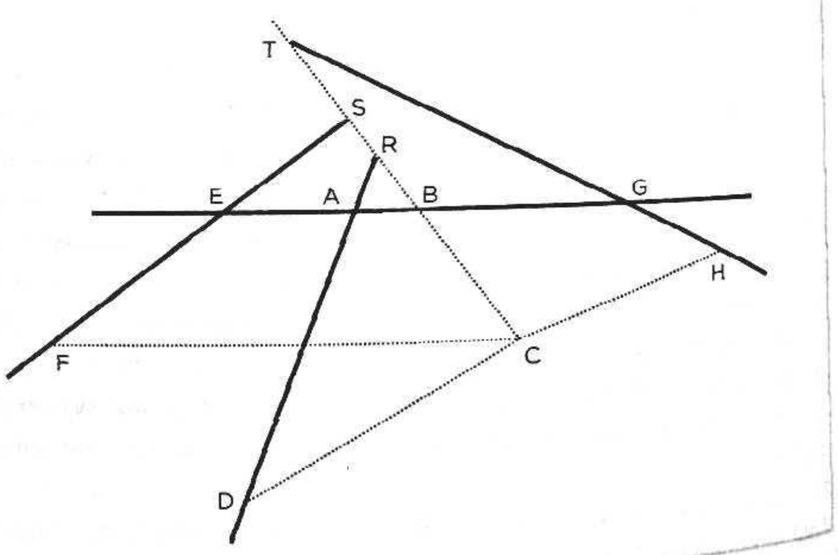
requería «conocer y trazar la línea sobre la cual deben todos ellos encontrarse; y Pappus dice que cuando no hay más que tres o cuatro líneas rectas dadas, es en una de las tres secciones cónicas». El planteamiento que imprimió al problema fue el siguiente:

> He comprendido ante todo, que planteado el problema para tres, cuatro o cinco líneas, se puede siempre encontrar los puntos buscados, por la geometría simple, es decir sin servirse más que de la regla y el compás, ni hacer otra cosa que lo ya dicho; excepto solamente cuando, siendo cinco las líneas, ellas son todas paralelas. Y he encontrado que cuando no hay más que tres o cuatro líneas dadas, los puntos buscados se encuentran todos no solamente en una de las tres cónicas sino a veces en la circunferencia de un círculo o en una línea recta.

Antes de dar la respuesta, que queda ilustrada en la figura 1, Descartes aclaró que trataría de «dar la demostración en pocas palabras, pues ya me cansa tanto escribir».

> Sean AB, AD, EF, GH, etc., varias líneas dadas y debe encontrarse un punto, como C, del cual trazando otras líneas a las dadas, como CB, CD, CE y CH, de manera que los ángulos CBA, CDA, CFE, CHG,

FIG. 1






> etcétera. Sean dados, y que el producto de la multiplicación de una parte de estas líneas, sea igual al producto de la multiplicación de las otras; o bien que ellas tengan otra proporción dada, lo que no hace, en modo alguno, más difícil el problema. Primero yo supongo la cosa como ya hecha y para salir de la confusión de todas esas líneas, considero una de las dadas y una de las que hay que encontrar, por ejemplo AB y CB, como las principales y a las cuales trato de referir todas las otras. Sea designado $x$ el segmento de la línea AB comprendido entre los puntos A y B; y CB sea designado $y$; y todas las demás líneas se prolonguen hasta que corten a estas dos también prolongadas, si es necesario y si no le son paralelas; como se ve cortan la línea AB en los puntos A, E, G y la línea BC en los puntos R, S, T.

He aquí uno de los puntos de mayor interés de la *Geometría* de Descartes: empezar el análisis, suponer el problema resuelto, dar nombre a todos los segmentos necesarios para representarlos, tanto los conocidos como los desconocidos, y reconstruir algebraicamente el problema hasta obtener una ecuación que permitirá alcanzar la síntesis. Para facilitar este proceso, Descartes introdujo el primer sistema de coordenadas de la *Geometría*:

> Considero una de las dadas y una de las que hay que encontrar, por ejemplo AB y CB, como las principales y a las cuales trato de referir todas las otras. Se ve así que cualquiera que sea el número de líneas dadas, todas las líneas trazadas desde C, que forman ángulos dados, conforme al enunciado, se pueden siempre expresar, cada una por tres términos de los que uno está compuesto por la cantidad desconocida y multiplicada o dividida por alguna otra conocida, y la otra, de la cantidad desconocida $x$, también multiplicada o dividida por alguna otra conocida y la tercera, de una cantidad toda conocida. Se ve que multiplicando varias de estas líneas entre sí, las cantidades $x$ e $y$ que se encuentran en el producto, no pueden tener cada una más que tantas dimensiones como líneas haya.

Así pues, aunque no lo explicitó, en el caso de tres o cuatro rectas el problema equivaldría a una ecuación cuadrática de la forma:

$$Ax^2 + Bxy + Cy^2 + dx + ey + f = 0.$$

De esta manera, en el umbral del Libro II de la *Geometría*, aparecieron por primera vez las curvas como lugares geométricos definidos por ecuaciones. Descartes resolvió de forma brillante y general el problema de Pappus y evidenció la potencia de unos métodos que, con el transcurso de tiempo, se convirtieron en la esencia de la geometría analítica.

## EL PESO DE APOLONIO EN LAS CIENCIAS Y LA TÉCNICA

Durante casi dos milenios, la idea de Apolonio acerca de que las órbitas celestes debían explicarse mediante la combinación de movimientos circulares fue una de las más importantes teorías astronómicas. Desarrollada por el astrónomo Hiparco de Nicea en el siglo II a.C., se conoce su evolución a través del *Almagesto* de Ptolomeo, que completó y remató el «sistema geocéntrico», también conocido como «sistema ptolemaico». Este tuvo una vigencia indiscutible durante la Edad Media; tanta, que se pensaba que había sido revelado por Dios al hombre. Sin embargo, la publicación de *De revolutionibus orbium coelestium* (1546), la trascendental obra del astrónomo polaco Nicolás Copérnico (1473-1543), cambió de forma radical el panorama. El tránsito progresivo hacia un «sistema heliocéntrico» acarreó una gran revolución cultural y un conflicto religioso que afectaría de forma considerable al ámbito científico, especialmente a Giordano Bruno (1548-1600) y Galileo Galilei (1564-1642), autor de *Diálogo sobre los dos sistemas del mundo, ptolemaico y copernicano* (1632). En cualquier caso, la formulación de la ley mecánica de caída libre de los cuerpos:

$$e\,(t) = (1/2) \cdot g\,t^2,$$

donde $e$ es el espacio, $t$ es el tiempo y $g$ es la aceleración de la gravedad, permitió a Galileo resolver un antiguo problema de cinemática: estudiar las trayectorias de las balas de un cañón —si

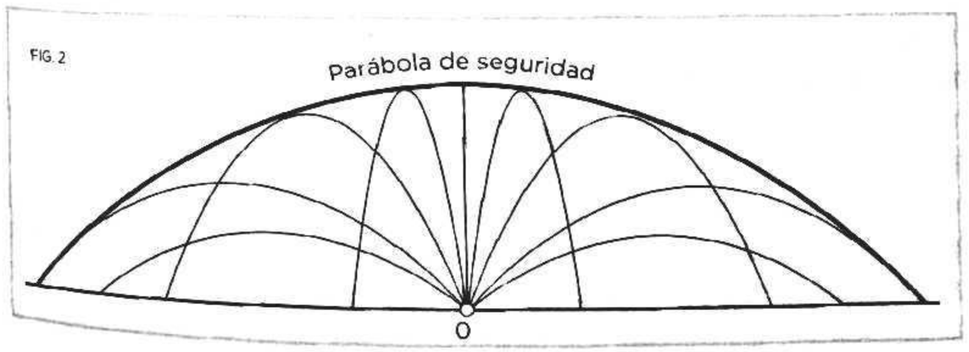


se prescindía de la resistencia del aire— y descubrir que eran parábolas. Hoy en día puede parecer elemental, pero en su tiempo supuso una fuerte quiebra de las concepciones vigentes. Probablemente fue la primera vez, en la historia de la ciencia, que se utilizó una sección cónica diferente de la recta o la circunferencia para la explicación de un fenómeno físico.

La explicación del mismo es la siguiente. Si se mantiene constante la velocidad $v$ con la que el proyectil sale del cañón y se varía el ángulo de inclinación del tubo con respecto al horizonte, el proyectil describirá diferentes parábolas y alcanzará distintas distancias de vuelo. La máxima distancia corresponde al ángulo de inclinación de 45° y es igual a $v^2/g$. Al disparar de forma vertical, el proyectil alcanzará una altura dos veces inferior: $v^2/2g$. Lo sorprendente es que para cada velocidad de salida del proyectil, cualquiera que sea la posición que se dé al tubo —mantenido en un mismo plano vertical—, siempre quedarán sitios en la tierra y en el aire que dicho proyectil no alcanzará. Todos ellos, más los puntos donde puede llegar el proyectil si se apunta de forma adecuada, están limitados, asimismo, por una curva parabólica: la «parábola de seguridad».

Uno de los discípulos de Galileo, el físico y matemático italiano Evangelista Torricelli (1608-1647), confirmó que la envolvente de la familia de las trayectorias parabólicas contenidas en un mismo plano es otra parábola que jamás es sobrepasada por ningún proyectil disparado por el cañón. De ahí la denominación de «parábola de seguridad» que, como se muestra en la figura 2, cumple además otra propiedad muy notable: su tangente en el vértice coincide con la directriz de todas las parábolas de la familia.

FIG. 2



La influencia de las obras de Apolonio no termina aquí. Por ejemplo, el astrónomo alemán Johannes Kepler (1571-1630) dio nombre a los focos y ponderó su importancia como elemento generador de propiedades de las cónicas. Kepler desarrolló una especie de «principio de continuidad unificado para todas las secciones cónicas». Comenzó por la sección cónica más elemental, formada simplemente por dos rectas secantes, en las que el foco es el punto de intersección y se pasa de forma gradual por una familia infinita de hipérbolas a medida que un foco se va alejando del otro. Cuando se ha alejado de forma infinita, se tiene una parábola y, al traspasar el punto del infinito y acercarse de nuevo por el otro lado, se obtiene una familia de elipses; hasta que cuando coinciden los dos focos, se obtiene una circunferencia.

Kepler defendió las teorías heliocéntricas en *Mysterium Cosmograhicum* (1596), y al trabajar con el astrónomo danés Tycho Brahe (1546-1601) descartó que ningún sistema combinado de circunferencias pudiera explicar la órbita de Marte. En 1609 publicó *Astronomia Nova*, donde sostuvo que «los planetas no se movían en órbitas circulares centradas en el Sol, sino en órbitas elípticas con el Sol en uno de los focos». Añadió que «las áreas barridas —por el radio vector que une el Sol con el planeta— en tiempos iguales son iguales». Estos descubrimientos se conocen como la primera y segunda ley de Kepler del movimiento planetario. Así entró en la ciencia astronómica, para explicar la configuración del universo, la misma elipse estudiada casi 2000 años antes por Apolonio como objeto puramente geométrico.

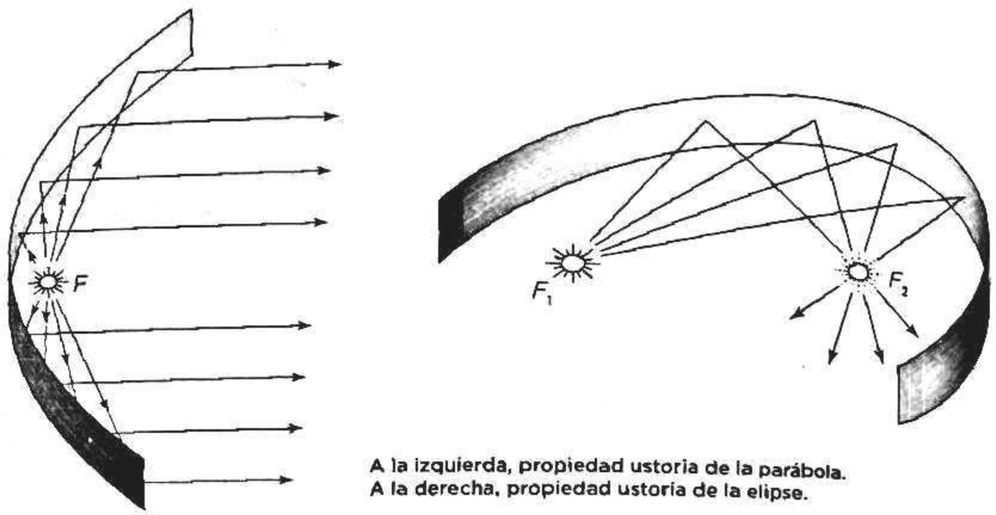
La tercera ley de Kepler del movimiento planetario apareció en *Harmonices Mundi Libri* (1619), donde se afirma que «el cuadrado de los períodos de la órbita de los planetas es proporcional al cubo de la distancia promedio al Sol». Con sus leyes planetarias, Kepler abrió las puertas para desentrañar nuevos enigmas. Lo que comenzó con las esferas de Pitágoras y Eudoxo y las circunferencias de Apolonio, Ptolomeo y Copérnico, continuó con las parábolas de Galileo, derivó en las elipses de Kepler y abrió el campo de la teoría de la gravitación universal de Isaac Newton, que se fundó precisamente sobre los trabajos de Galileo y Kepler. Newton consiguió unificar las diversas teorías de sus predecesores, elaboró la famosa «ley de gravitación universal» y publicó el conjunto de sus trabajos, que relacionaban la mecánica y la astronomía, en su obra mayor, *Principia* (1687). Newton probó que las leyes de Kepler son consecuencia directa de las leyes del movimiento de los cuerpos, llamadas desde entonces «leyes de Newton». Su gran mérito fue demostrar que a partir de la ley de gravitación universal podían derivarse las leyes de Kepler y describirse de forma teórica y exacta los movimientos de los astros, lo que constituyó una revolución científica y filosófica. En concreto, Newton demostró en el primer libro de los *Principia*, *El movimiento de los cuerpos*, la primera ley de Kepler; y también que la ley de gravedad, es decir, el hecho de que la fuerza de atracción sea inversamente proporcional al cuadrado de la distancia, implicaba la tercera ley de Kepler.

Cabe destacar que la geometría de *Las cónicas* de Apolonio está presente y campea a lo largo de todo este primer libro, con 117 ilustraciones —en sus 98 proposiciones y 48 problemas—, en donde aparecen las cuatro cónicas: circunferencia, elipse, parábola e hipérbola. Newton no utilizó ningún otro concepto sobre las secciones cónicas que fuera posterior al «gran geómetra» griego. En las ediciones de los *Principia*, además, suele aparecer una nota sobre el *latus rectum* y otros conceptos de Apolonio. Resulta muy significativo que la base geométrica de los *Principia* de Newton, seguramente el libro más importante de la historia de la ciencia, sean, literalmente, los cuatro primeros libros de *Las cónicas* de Apolonio.

## ANTENAS, SATÉLITES Y OTRAS APLICACIONES

Uno de los emblemas que ha traído consigo la implantación mundial de los teléfonos móviles y los canales de televisión por satélite son las antenas parabólicas. En su concepción tuvo cierto protagonismo la geometría tratada a lo largo de este libro, vinculada a las propiedades de la parábola; una vez más, el germen de muchos avances actuales hunde sus raíces en las aportaciones milenarias de Apolonio. Una antena parabólica es una parte de un paraboloide. Tiene la propiedad de que toda señal que llegue paralela al eje se reflejará en

## LOS ESPEJOS USTORIOS




**A la izquierda, propiedad ustoria de la parábola. A la derecha, propiedad ustoria de la elipse.**

Existen testimonios de la Antigüedad que narran cómo Arquímedes incendió las velas de las naves romanas que asediaban Siracusa en 216 a.C. valiéndose de los denominados «espejos ustorios», es decir, aquellos espejos cóncavos que reflejan los rayos solares y, al concentrarlos en un foco, generan un calor capaz de quemar o fundir objetos. Si bien el hecho histórico ha sido ampliamente cuestionado, lo cierto es que estas propiedades de los espejos ustorios resultan innegables y se fundamentan en las secciones cónicas, la principal materia de estudio de Apolonio. De esta manera, si se encorva una chapa metálica bien pulida y se le da la forma de elipse, atendiendo a la «ley minimal del camino» de Herón sobre la reflexión de la luz, se deduce que el ángulo de incidencia debe ser igual al ángulo de reflexión. Esto supone que los rayos de luz emanados de un foco de la elipse, tras reflejarse en la chapa elíptica, habrán de pasar por el otro foco. Si ahora se considera un espejo elipsoidal engendrado por la revolución de una elipse en torno a su eje mayor, se obtendrá un instrumento con una propiedad que puede ser terrorífica: al colocar en uno de sus focos una fuente intensa de luz, todos los rayos que provengan de ella se concentrarán en el otro foco, provocando la ignición de cuanto allí se halle. En el mismo principio se basa la transmisión de voces a distancia que a veces sucede en algunos lugares cuya forma tiene que ver con la elipse. Por su parte, la parábola goza de propiedades ustorias similares a las de la elipse, incluso más conocidas en la ciencia, la literatura y hasta en las leyendas. En cierto sentido, la parábola se puede considerar como una elipse en la que uno de los focos se hubiera trasladado al infinito.

### Faros de vehículos y reflectores

De la misma manera que con la elipse, si se encorva una chapa metálica bien pulida, se le da la forma de parábola y se atiende a la misma ley de Herón, los rayos de luz emanados del foco de la parábola, tras reflejarse en la chapa parabólica, forman un haz de rayos paralelos. De forma recíproca, si un haz de rayos paralelos al eje de la parábola incide sobre la chapa parabólica, los rayos se reunirán, después de reflejarse, y se concentrarán en un solo punto: el foco de la parábola. En esta propiedad de la parábola se basa el empleo de espejos parabólicos en los faros de los vehículos y, por lo general, en los reflectores. Son parte de un paraboloide, que resulta de la rotación de una parábola en torno a su eje.

dirección al foco; por eso, lo que hace una antena parabólica es recoger señales en toda su superficie y concentrarlas en su foco, donde se pondrá un receptor. De este modo se consiguen ondas paralelas con una fuente de emisión situada en el eje de la parábola y suficientemente alejada. Así funcionan, por ejemplo, los satélites geoestacionarios. Al efecto, se precisa enfocar la antena al satélite del cual se reciben las señales, que se concentrarán en el foco del paraboloide, lugar donde está ubicado el receptor de la televisión. Las antenas con mayor superficie concentran más señales y optimizan la recepción de los programas, lo que explica que sean monumentales en los campos de transmisión y de recepción científicos y militares, así como los propios de las compañías de telefonía. Bajo el mismo principio científico se diseñan los hornos solares, que no necesitan más combustible que la luz del sol. Al seguir un proceso análogo, habría que colocar el depósito a calentar en el foco del espejo en forma de paraboloide. Con ello se alcanzan temperaturas de hasta 4 000 °C, capaces de fundir materiales refractarios sin introducir impurezas. También cabe citar ciertas centrales de producción de energía eléctrica cuya fuente energética es el sol. No dejan de ser similares a los hornos citados, pero su tamaño es mucho mayor. La luz del sol se refleja en un gran paraboloide con numerosas placas, dispuestas de una forma muy estudiada.

## UNA HUELLA IMBORRABLE EN LA ARQUITECTURA

Las cónicas son algunas de las curvas más importantes que la geometría ofrece a la arquitectura desde tiempos inmemoriales y en diferentes espacios, y con ellas se han obtenido verdaderas obras de arte. Se conservan construcciones centenarias e incluso milenarias donde se pueden observar cónicas en su fachada o interior: por ejemplo, el Coliseo de Roma, construido en el siglo I y con perfectos arcos de parábola en su fachada, y la Torre Eiffel, erigida entre 1887 y 1889 en París, una pirámide de base cuadrada cuyas aristas no son segmentos rectilíneos, sino arcos hiperbólicos; la razón es que estos responden mejor al comportamiento general de la estructura de la torre frente a la fuerza del viento.

Hoy en día no solo se usan las cónicas en detalles de tipo decorativo, sino también en grandes estructuras, donde cumplen una función muy relevante a base de hiperboloides de una hoja —o de revolución, resultado del giro de una hipérbola en torno al eje principal que no corta a la curva—. Es el caso de las torres hiperbólicas de las grandes centrales térmicas, los puentes y algunas cúpulas. A veces dan forma, también, a escaleras, balcones y otras partes de la edificación. Un capítulo aparte son las obras del arquitecto español Antonio Gaudí (1852-1926), en las que se da una insólita fusión de calidad estética y excelencia estructural, de forma y función.

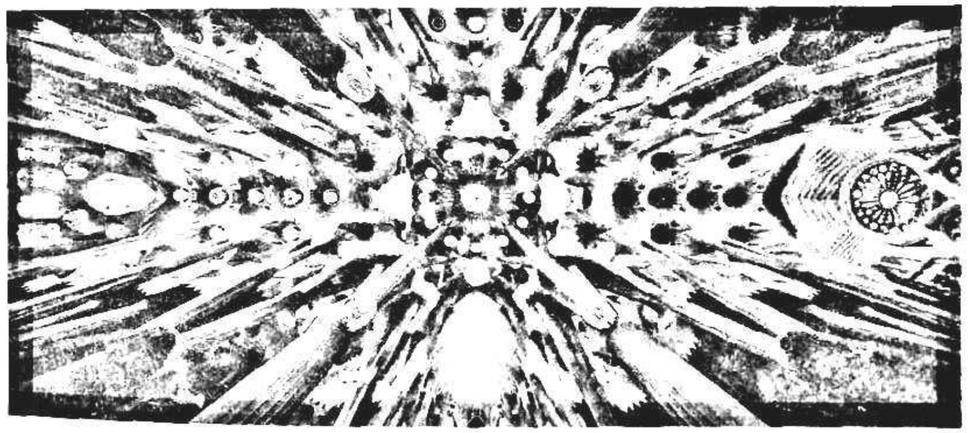
En la aplicación de la cónicas a la arquitectura ha predominado el arco de circunferencia, impuesto por los romanos en sus construcciones de arcos de templos, puentes y acueductos, bóvedas esféricas de termas y templos. Este tipo de arco fue continuado por el arte románico en sus arcos interiores, ventanales y claustros. Los visigodos y los mozárabes emplearon el arco de herradura, formado por los dos tercios de una circunferencia. Después, el arte gótico acabó con el uso del centro único mediante el arco ojival, determinado por dos arcos de circunferencia; y los estilos artísticos posteriores, plateresco y barroco, fueron incrementando el número de centros de un arco. En algunas construcciones barrocas el círculo tiende a trasformarse en elipse: sobre todo, en ventanas, hornacinas, medallones, retablos y escudos.

### GAUDÍ, MAESTRO DE LAS FORMAS CÓNICAS

El arquitecto español Antonio Gaudí amplió de forma considerable el número de formas planas y espaciales como nueva morfología estética, en el ámbito de la belleza, y como componente estructural, desde la perspectiva gravitatoria de las cargas. Su acervo geométrico reúne, en el plano, curvas parabólicas y catenarias; y en el espacio, además del cono y el cilindro, otras superficies regladas compuestas por líneas rectas que determinan superficies curvas en el espacio, como el helicoide, el hiperboloide de una hoja y el paraboloide hiperbólico. En ellas encontró un campo fascinante de investigación arquitectónica, sobre todo en lo relativo a la penetración de la luz, y aportó soluciones inéditas en muros, bóvedas y cubiertas. Los elementos geométricos más importantes de su obra son, por tanto, las formas cónicas —circunferencias, elipses, parábolas e hipérbolas—, las superficies regladas, las formas cilíndricas —cilindros y conos— y el hiperboloide de una hoja. Gaudí usó profusamente el paraboloide hiperbólico en el Palacio Güell, la Colonia Güell y el Park Güell.

**Paraboloides hiperbólicos**

La cumbre de los paraboloides hiperbólicos llegó con su obra más universal: la basílica de la Sagrada Familia. Los ventanales laterales se acoplan a las complejas formas de los hiperboloides de una hoja, presentes en torno al centro elíptico en el que forman parte del ventanal. Un segundo caso son las bases de las grandes columnas, que crean una transición suave entre el suelo plano y el principio de las columnas, con parejas de medios paraboloides hiperbólicos. En el techo de las naves laterales, los árboles de columnas están rematados por capiteles hiperboloidales, y los paraboloides hiperbólicos suavizan la intersección de los hiperboloides de una hoja, al aprovechar restos de los hiperboloides implicados para construir las generatrices de los hiperbólicos.



Detalle del techo de la nave de la basílica de la Sagrada Familia, en Barcelona (España).

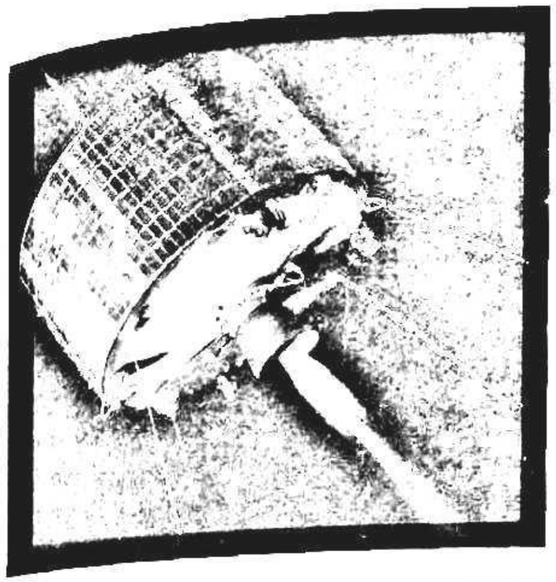
En cuanto a las tres cónicas tradicionales —elipse, parábola y hipérbola—, se puede afirmar que la elipse, en términos generales, se utiliza con frecuencia en anfiteatros y estadios, en el cañón de las escaleras de caracol y en la superficie de cúpulas; que la parábola, dada su gran resistencia estructural, se emplea en arcos, cúpulas y puentes, y que la hipérbola, de forma compleja y una buena resistencia estructural, se puede encontrar en cubiertas y estructuras de soporte como columnas, torres y chimeneas.

«Por muchas razones quiero hacer las bóvedas con paraboloides hiperbólicos. Es un magnífico signo de la Santísima Trinidad, porque son dos generatrices rectas e infinitas, y una tercera generatriz recta e infinita, que se aguanta sobre las otras dos. El Padre y el Hijo relacionados por el Espíritu Santo. Los tres igualmente infinitos, los tres una sola cosa».

— Antonio Gaudí.

La arquitectura y la ingeniería también han empleado las superficies resultantes del giro de las cónicas alrededor de uno de sus ejes. Al girar una circunferencia en torno a su diámetro se engendra una esfera, la mitad de la cual es la forma más habitual de las cúpulas. Al girar una elipse, una hipérbola o una parábola se engendran las superficies de revolución elipsoide, hiperboloide y paraboloide, empleadas en numerosas construcciones artísticas e industriales en las últimas décadas. Incluso se han utilizado otras superficies cuadráticas generadas también por otros movimientos de cónicas: en particular, el cilindro elíptico que toma como directriz una elipse; el cilindro parabólico que toma como directriz una parábola, y el paraboloide hiperbólico —superficie creada a partir de una parábola con la concavidad hacia abajo que se desliza a lo largo de otra parábola con la concavidad hacia arriba—. Estas superficies son regladas, es decir, compuestas por líneas rectas, y fáciles de construir con listones de madera, hormigón o hierro. Sus resultados estéticos son muy originales. A título de ejemplo, pueden citarse algunos edificios donde las cónicas han cumplido un papel estético o estructural relevante: por ejemplo, la elipse se





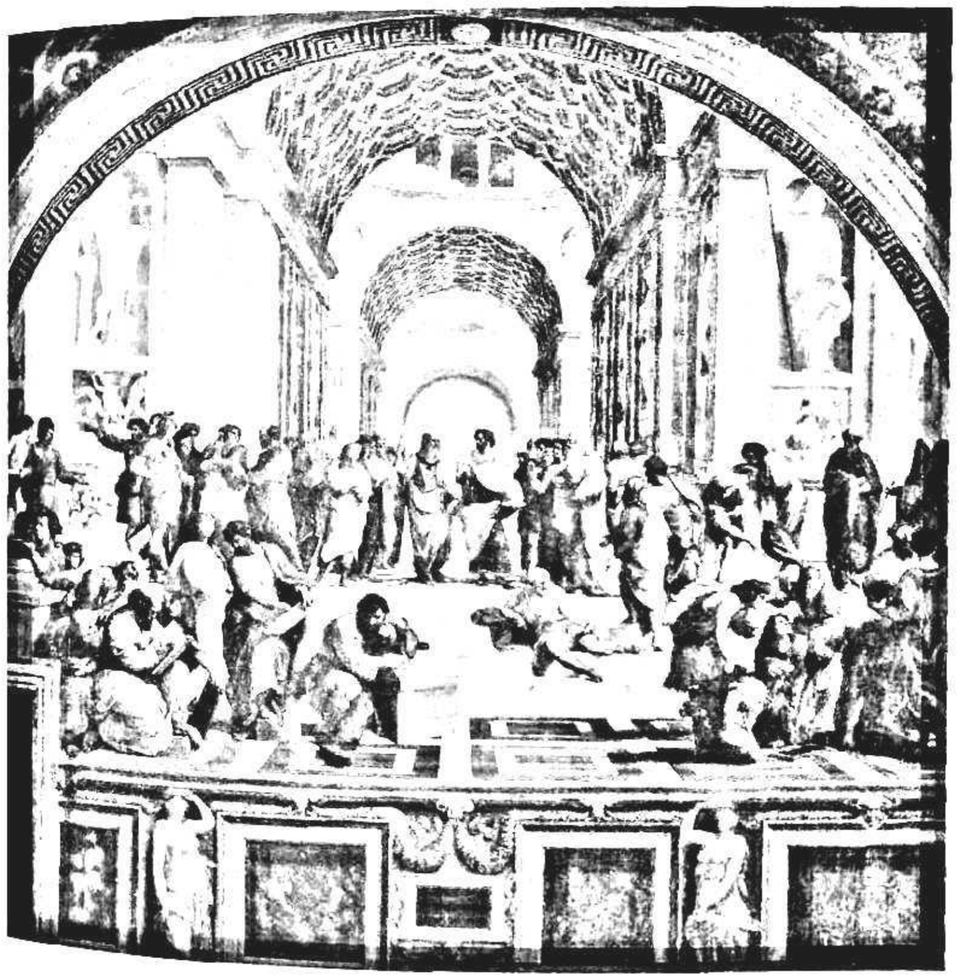


FOTO SUPERIOR IZQUIERDA:
**En 1961 la NASA lanzó el Syncom, el primer satélite geosíncrono de la historia. Dado que la posición relativa de estos satélites respecto a la Tierra no puede variar, su cálculo exige la intervención de las leyes de Kepler.**

FOTO SUPERIOR DERECHA:
**Vista aérea de la plaza de San Pedro, en el Vaticano, donde se aprecia el carácter arquitectónico elíptico de este recinto sagrado para la cristiandad.**

FOTO INFERIOR:
**Más allá de su significación y belleza, la escena que Rafael plasmó en su *Escuela de Atenas* supone una composición elíptica de primer orden.**

halla presente en el anfiteatro de Pompeya y la plaza de San Pedro del Vaticano; la parábola otorga su razón de ser al Gateway Arch de San Luis, en Missouri, y la hipérbola hace lo propio con la catedral de Brasilia. Aunque de esta enumeración se excluye la esfera —circunferencia—, un elemento habitual y bien conocido, debe mencionarse la cúpula esférica del Panteón de Agripa, en Roma. En cuanto a otras artes distintas a la arquitectura, la pintura no se muestra ajena a los hallazgos de Apolonio sobre las secciones cónicas y otros conceptos geométricos, pero la enumeración de las obras que los recogen sería demasiado extensa. No obstante, por su calidad excepcional y representatividad, cabe mencionar la *Escuela de Atenas*, de Rafael, como un elemento elíptico maravilloso.

Todo ello conduce a sostener que el legado de Apolonio continúa tan presente en las artes como en las ciencias. De *Las cónicas* a los satélites geoestacionarios, pasando por Descartes, Fermat, Kepler, Newton y tantos otros, la geometría ha dado un salto de gigante y proporcionado aplicaciones de incalculable valor. De ello se ha querido dar cuenta en este libro, cuyo objetivo no es otro que dar a conocer la vida y obra de Apolonio y reivindicarlo como uno de los matemáticos más insignes de la historia. Así lo certifica la trascendencia del campo geométrico en el que ejercitó su imaginación, y así lo sentenció, de forma entusiasta, un juez cuya competencia matemática queda fuera de toda discusión, Gottfried Wilhelm Leibniz:

> Todo aquel que entienda a Apolonio se sentirá inclinado a admirar menos los descubrimientos de los prohombres más eminentes de épocas posteriores.

# Lecturas recomendadas


APOLONIO, *Les Coniques*, París, Librairie A. Blanchard, 1959.

BOYER, C. B., *Historia de las matemáticas*. Madrid, Alianza Universidad, 1986.

COLERUS, E., *Breve historia de las matemáticas*. Madrid, Doncel, 1972.

DEL RÍO, J., *Lugares geométricos: cónicas*. Madrid, Síntesis, 1996.

EUCLIDES, *Elementos*. Madrid, Gredos, 1996.

GONZÁLEZ URBANEJA, P. M., *El legado de las matemáticas. De Euclides a Newton. Los genios a través de sus libros*. Sevilla, Consejería de Cultura de la Junta de Andalucía, 2000.

— *Los orígenes de la geometría analítica*. Tenerife, Fundación Canaria Orotava de Historia de la Ciencia, 2003.

— *Fermat y los orígenes del cálculo diferencial*. Madrid, Ediciones Nivola, 2008.

HEAT, T. L., *A History of Greek Mathematics*. Nueva York, Dover Publications, 1981.

KLINE, M., *El pensamiento matemático de la Antigüedad a nuestros días*. Madrid, Alianza Universidad, 1992.

PAPPUS DE ALEJANDRÍA, *La Collection Mathémathique*, París, Librairie A. Blanchard, 1982.

VERA, F., *Científicos griegos*, Madrid, Aguilar, 1970.

# Índice


Abel, Niels Henrik, 26
abscisas, 49, 84, 86, 108, 139
Academia platónica, 20, 21, 37
Alejandro Magno, 19, 20, 39
álgebra geométrica, 36, 66, 114, 117
antenas parabólicas, 133, 135, 147-149
aplicación de las áreas, 36, 81, 84
Aristarco, 19
Aristeo, 47, 83, 113, 129, 138
Aristóteles, 20, 115, 124, 125
Arquímedes, 17, 19, 23, 26, 47-49, 53, 73, 83, 91, 114, 124, 130, 131, 137, 148
Arquitas de Tarento, 23, 25, 29
asíntotas, 24, 31, 33, 38, 40, 76, 79, 80, 106

Barrow, Isaac, 35
Brahe, Tycho, 146
Bruno, Giordano, 144

cilindro de revolución, 23
cisoide, 97, 114, 124
  de Diocles, 114
Commandino, Federico, 37
concoide de Nicomedes, 114, 125
cono de revolución, 23
Conon de Samos, 91
coordenadas, 21, 22, 30, 32, 33, 65, 78, 85, 87, 105, 139, 140, 143
Copérnico, Nicolás, 144, 146
cuadratriz, 23, 114, 115
  de Dinostrato, 114
  de Hipias, 23, 114
cuadratura del círculo, 36
cuerpos platónicos, 128

Descartes, René, 66, 120-122
diámetros conjugados, 33, 34, 75, 76
directriz, 24, 82, 83, 145, 152
duplicación del cubo, 20, 22, 23-26, 36, 37
Durero, Alberto, 62

elipse, 20, 23, 27-30, 33, 34, 80, 82-87, 104-106, 108-110, 117, 136, 138, 140, 146-152
ejes, 24, 29, 30, 31, 33
Empédocles de Agrigento, 128
envolvente, 104, 145
Eratóstenes, 19, 28, 29

Euclides, 17, 19, 32, 35, 38, 40, 43, 47, 66, 70, 73, 83, 91, 113, 114, 116, 117, 119, 126-130, 135, 140, 141
Eudemo, 18, 31
Eudoxo de Cnido, 40, 115, 146
Euler, Leonhard, 120-122
Eutocio de Ascalón, 17, 23, 26, 34, 47, 131
evoluta, 33, 34, 95, 104, 105
evolvente, 33, 95
excentricidad, 24

Fermat, Pierre de, 66, 114, 122, 135, 137-140, 154
foco, 24, 78-87, 115, 146, 148, 149

Galileo, 20, 144-146
Gaudí, Antonio, 150-152
generatriz, 20-22, 27, 30, 44, 47, 152
geometría analítica, 15, 20, 22, 24, 68, 114, 117
Gémino de Rodas, 47, 126
Ghetaldi, Marino, 125

Halley, Edmond, 36, 37, 116
Herón de Alejandría, 26, 149
Hiparco de Nicea, 144
Hipatia de Alejandría, 34
hipérbola, 20, 23, 24, 27-30, 32-34, 38, 47, 49, 50, 51, 53-57, 59-61, 64, 66, 68-76, 78-87, 94, 97, 100-102, 105-110, 117, 120, 140, 146, 147, 150, 152, 154
Hipsicles de Alejandría, 129
hornos solares, 135, 149
Huygens, Christiaan, 33, 89, 95, 97, 125

Isabel de Bohemia, 122

Kepler, Johannes, 20, 82, 146, 147, 154

leyes de, 146, 147, 153
*latus rectum*, 22, 23, 27-30, 47, 49, 50, 53, 65, 69, 76, 147
Leibniz, Gottfried, 48, 154
L'Hôpital, marqués de, 122
lugares, 24, 31, 68, 83, 108, 113, 118-123, 135, 137, 140
planos, 24, 68, 113, 118-123, 135, 137, 140
sólidos, 31, 83, 108

Mandelbrot, Benoît, 20
Marinus, 114
medias proporcionales, 22, 23, 26, 28, 29
Menecmo, 20-24, 26, 29, 38

Naucrates, 30, 31
Newton, Isaac, 48, 120, 122, 127, 146, 147, 154
Omerique, Antonio Hugo de, 127
ordenadas, 45, 65, 70, 74-76, 84, 87, 93, 96, 98, 99, 108, 139

Pappus de Alejandría, 17, 18, 26, 34, 37, 83, 108, 113, 114, 116, 117, 123-126, 129, 130
parábola, 20, 22, 23, 27-29, 47, 49-54, 57, 61, 64-66, 68-76, 78, 79, 82, 92, 94, 96, 98, 100-102, 104-106, 108, 109, 116, 117, 138, 140, 145-154
de seguridad, 145
paraboloide hiperbólico, 147-152
Pitágoras, 126, 128, 146
Platón, 23, 25, 26, 48, 120, 128
Poncelet, Jean-Victor, 120
problema
de Apolonio, 118, 122, 137
de Delos, 20-26, 28, 29
de Pappus, 32, 135, 140-144
Proclo de Licia, 19, 23, 115, 126, 129

propiedad
específica de la curva, 27
ustoria de la elipse, 148, 149
ustoria de la parábola, 148, 149
Ptolomeo, Claudio, 115

rectas
máximas, 100-108
mínimas, 100-108
normales, 103-108

satélite geoestacionario, 135, 137, 147, 148, 153, 154
sección de cono
acutángulo, 22
obtusángulo, 22
segmentos
máximos, 33
mínimos, 33
Serenus Antisensis, 34, 37
Simpson, Thomas, 122

tangentes, 33, 70-80, 83, 91, 93-95, 116, 117, 137
Teón de Alejandría, 19, 120
Torelli, Giuseppe, 122
Torricelli, Evangelista, 145
trayectoria de la bala de un cañón, 144, 145
trisección del ángulo, 36, 125

Viète, François, 120, 122, 137, 138, 140

Wantzel, Pierre-Laurent, 26
Woepcke, Franz, 130